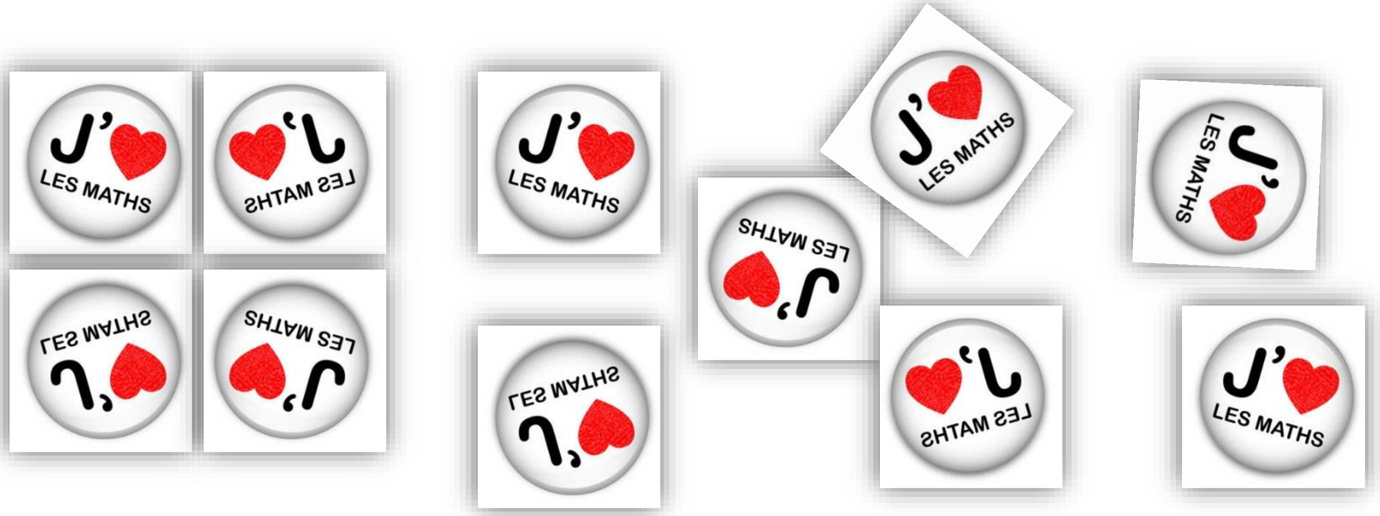
COLLEGE SAINT-BARTHELEMY

MATHEMATIQUE

PREMIERE ANNEE



SOLIDES ET FIGURES

Première partie : Les transformations du plan

Translations

Symétries Axiales – Symétries centrales

ANNEE SCOLAIRE 202… – 202…

Compétences

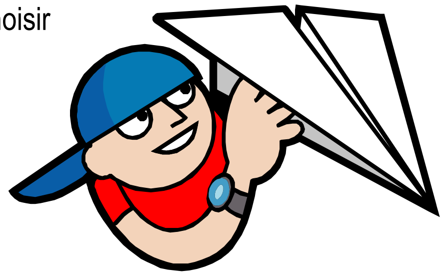
Expliciter les savoirs et les procédures

- Comprendre et utiliser, dans leur contexte, des termes usuels propres à la géométrie plane. Justifier une affirmation par les définitions de translation, symétrie orthogonale et symétrie centrale.
- Comparer des figures et reconnaitre la transformation qui les associe.
- Dans un contexte de pliage, de découpage, de pavage et de reproduction de dessins ou de figures, reconnaitre et caractériser une.
- Dans un contexte de pliage, de découpage, de pavage et de reproduction de dessins, relever la présence d'invariants fondamentaux.
- Justifier par des invariants la conservation d'une propriété d'une figure lorsqu'elle subit une transformation.
- Décrire les différentes étapes de la construction de l'image d'une figure par une transformation.

Appliquer une procédure

- Construire aux instruments l'image de figures par une translation, une symétrie axiale, une symétrie centrale en utilisant diverses propriétés de ces transformations.
- Retrouver le ou les axe(s) de symétrie d'une figure symétrique; retrouver le centre de symétrie d'une figure donnée.

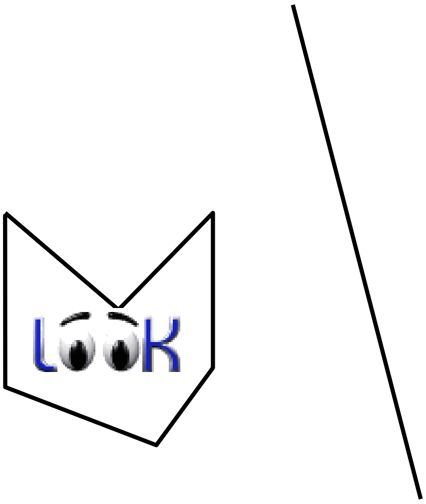
EXPLORATION : PLIAGES ET SYMETRIES



1. Plier une feuille de papier une ou deux fois (si on fait deux plis, les choisir parallèles ou perpendiculaires).
   Dessiner une figure simple sur une face du papier plié.
   Découper cette figure à travers toutes les épaisseurs.
   Déplier et reproduire les motifs obtenus sur une feuille blanche.[1]

2. Tu plies une feuille deux fois à angles droits. Quels types de quadrilatères peux-tu obtenir en coupant le coin situé à l'intersection des deux plis ?

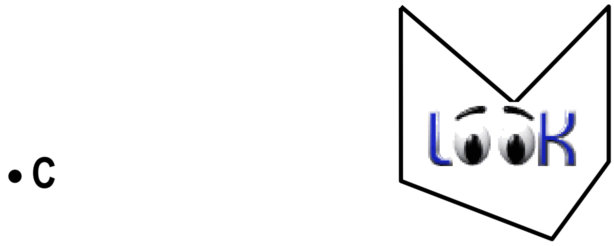
3. La figure suivante montre une tête de chat et une ligne droite. Qu'arrive-t-il si on plie la feuille le long de la droite et qu'on découpe le chat sur les deux épaisseurs ?
   Prévois le résultat sans plier. Pour cela, utilise les instruments de dessin (latte, équerre,…).



Théorie page 21

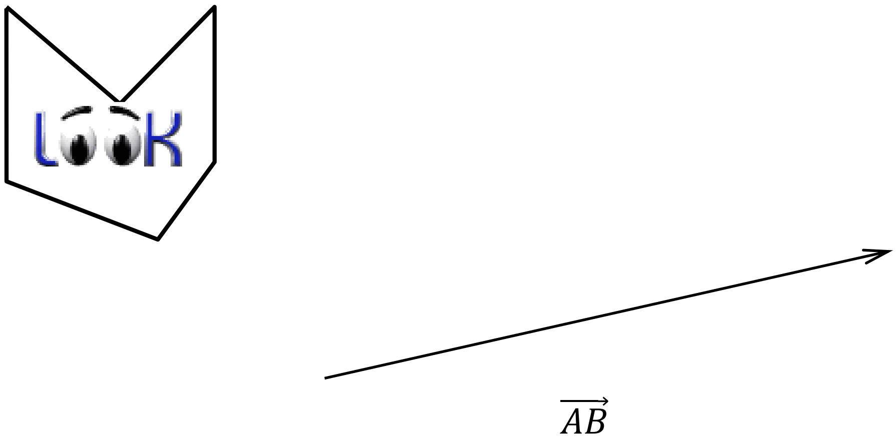
[1] « _Mathématiques 1 :De questions en questions_ » _pg 139, éd. DIDIER HATIER_

4. La figure suivante montre une tête de chat et un point. Qu'arrive-t-il si on fait tourner sa tête d'un demi-tour autour du point ?
Prévois le résultat et construis l'image du chat aux instruments de dessin.



Théorie page 14

5. La figure suivante montre une tête de chat et une flèche. Qu'arrive-t-il si on fait glisser le chat parallèlement à la flèche, dans le même sens et de la même longueur ?
Prévois le résultat et construis l'image de la tête de chat aux instruments de dessin.



Théorie page 7

CHAPITRE 6 : MOUVEMENTS DANS LE PLAN

Exploration : Pliages et symétries

1. LA TRANSLATION

1.1. Notion

Dans le cas de deux plis parallèles, pour passer de la figure 1 à la figure 3, il faut faire **glisser** le pentagone *sans sortir du plan de la feuille*. Ce *déplacement* s'appelle une **translation**.
Nomme **A, B, C, D et E** les sommets du pentagone de la fig.1 et **A', B', C', D' et E'** leur correspondant sur la

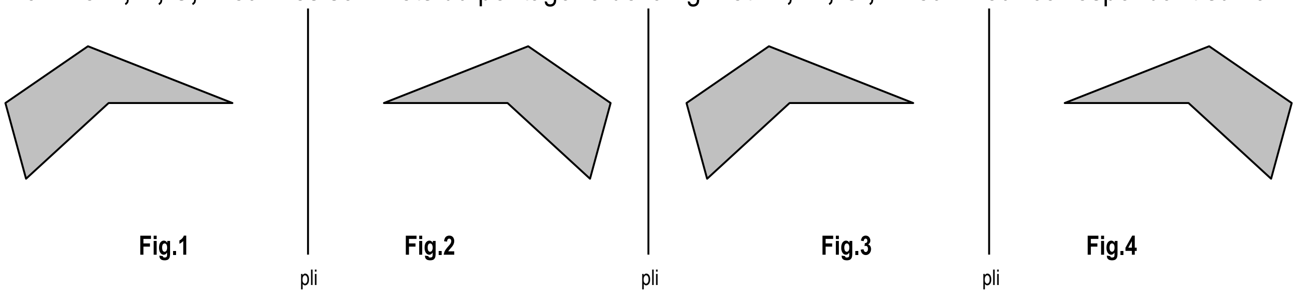


fig.3.
Caractéristiques de la translation:

- Tous les points se sont déplacés en ligne droite suivant une direction.
  Donne un nom à cette direction.

  Ton essai: ....

  Solution retenue: ....

- Le long de cette direction, tous les points se sont déplacés dans le même sens.
  Donne un nom au sens de ce déplacement.

  Ton essai: ....

  Solution retenue: ....

- Tous les points se sont déplacés d'une même distance.
  Donne un nom à cette distance.

  Ton essai: ....

  Solution retenue: ....

Nous résumerons ces trois renseignements par le vecteur: ....

- *Cite d'autres vecteurs qui auraient pu servir à définir cette même translation :* ………………

Pour définir cette translation en L.M., nous noterons **t** et un des vecteurs qui la caractérisent.

Ex: $t_{\overrightarrow{AA'}}$.

L'extrémité **A'** du vecteur s'appelle l'image de l'origine **A** de ce vecteur ; c'est ainsi que:

le point **B'** est l'image du point **B** par la translation $t_{\overrightarrow{AA'}}$.

le pentagone **A'B'C'D'E'** est l'image du pentagone **ABCDE** par la translation $t_{\overrightarrow{AA'}}$.

En L.M., nous noterons:

B' = $t_{\overrightarrow{AA'}}$ **(B)**

A'B'C'D'E' = $t_{\overrightarrow{AA'}}$ **(ABCDE)**.

1.2. Définition et notation

Nous retiendrons

1] **La définition de la translation.**

Une translation est un déplacement qui fait glisser les points du plan

- dans une direction donnée
- dans un même sens
- et d'une même distance.

2] **La notation**

$t_{\overline{MN}}$ **(A) = B** signifie que le point **B** est l'image du point **A** par la translation

de direction **MN**
de sens **M** vers **N**
et dont la longueur est $\overline{\mathbf{MN}}$.

1.3. Construction

Tu vas maintenant rédiger un message expliquant comment construire l'image d'un point par une translation donnée. Pour ta facilité, observe la situation représentée ci-dessous.

*Pour construire l'image du point **A** par la translation définie par le vecteur* $\overrightarrow{MN}$, *tu dois :*

1] ....

....

2] ....

....

3] ....

....

. N

M .

A .

Consignes de construction retenues après mise en commun

*Pour construire l'image du point **A** par la translation définie par le vecteur* $\overrightarrow{MN}$*, je dois*

1] ....

....

2] ....

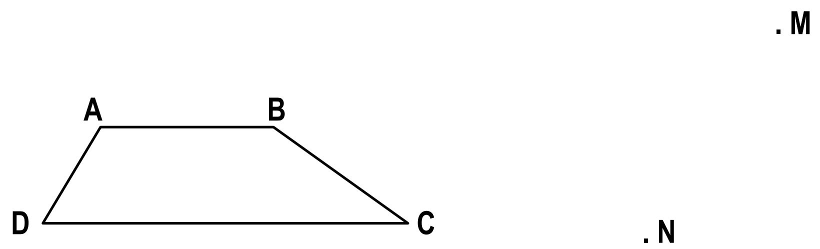
....

3] ....

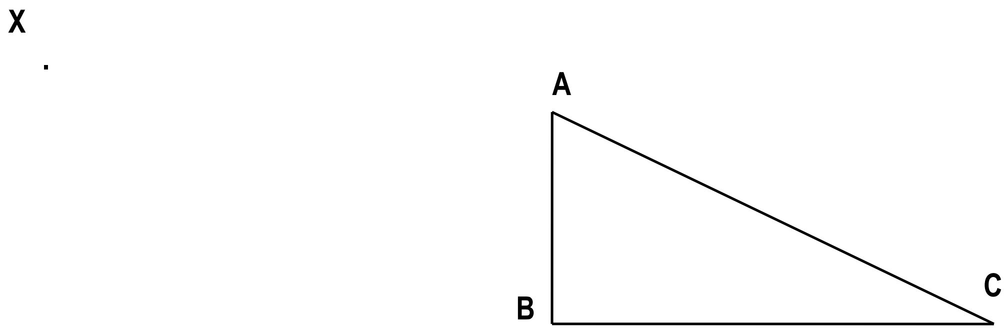
....

<u>Exercices</u>

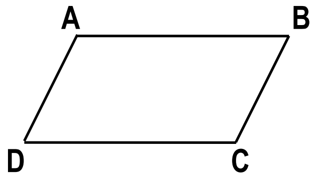
1] *Construis l'image du trapèze **ABCD** par* $t_{\overrightarrow{NM}}$



2] *Construis l'image du triangle* Δ ***ABC*** *par la translation* $t_{\overrightarrow{BX}}$.

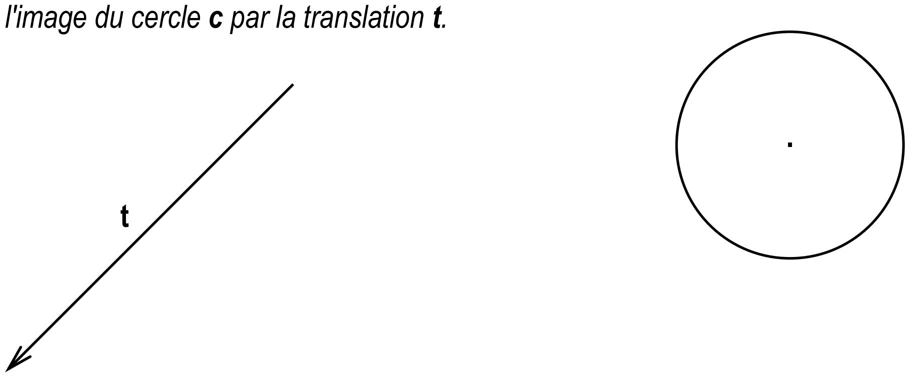


3] *Construis l'image du parallélogramme **ABCD** par la translation* $t_{\overrightarrow{AC}}$.



Remarque:
L'énoncé peut n'être donné que par une simple flèche.

4] *Construis l'image du cercle **c** par la translation **t**.*



1.4. Invariants

L'observation des images construites, nous montre que la forme et la taille des figures n'ont pas changé durant leur déplacement.

Nous dirons que l'objet et son image sont **isométriques**.

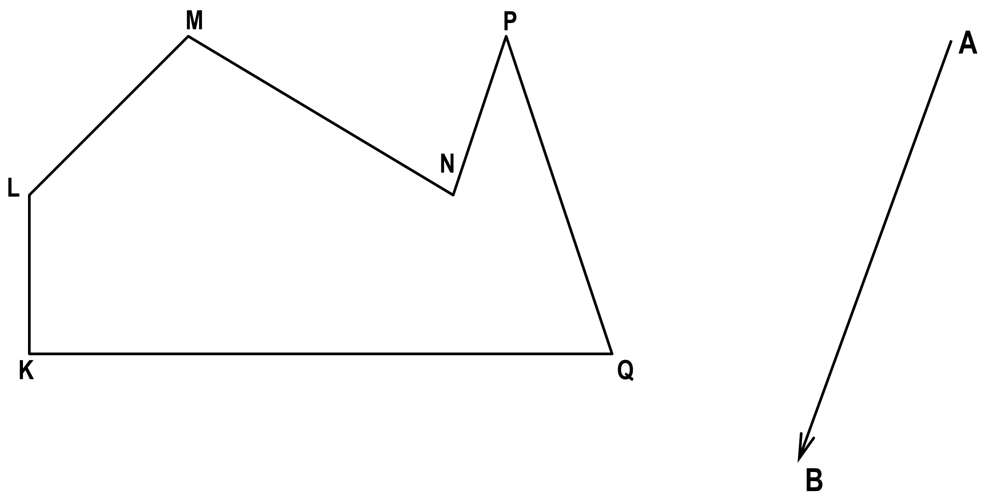
En effet, ils ont conservé

- ....
- ....
- ....
- ....
- ....
- ....
- ....
- ....

⇒ Toutes ces caractéristiques seront appelées des INVARIANTS pour la **translation**, car elles n'ont pas changé durant le déplacement.

Utilisation des invariants

1] Construis l'image de la figure ci-dessous par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$ en ne construisant l'image que d'un seul de ses points puis en utilisant les invariants pour obtenir l'image des autres points.



Légende

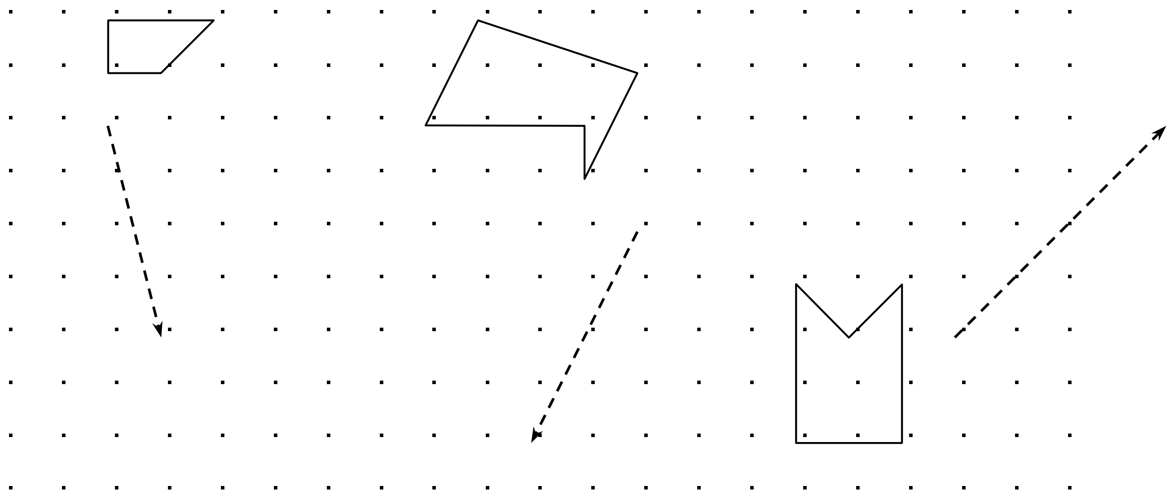
2] Note le nom des points-images et la légende.

3] Cite les invariants utilisés.

....

....

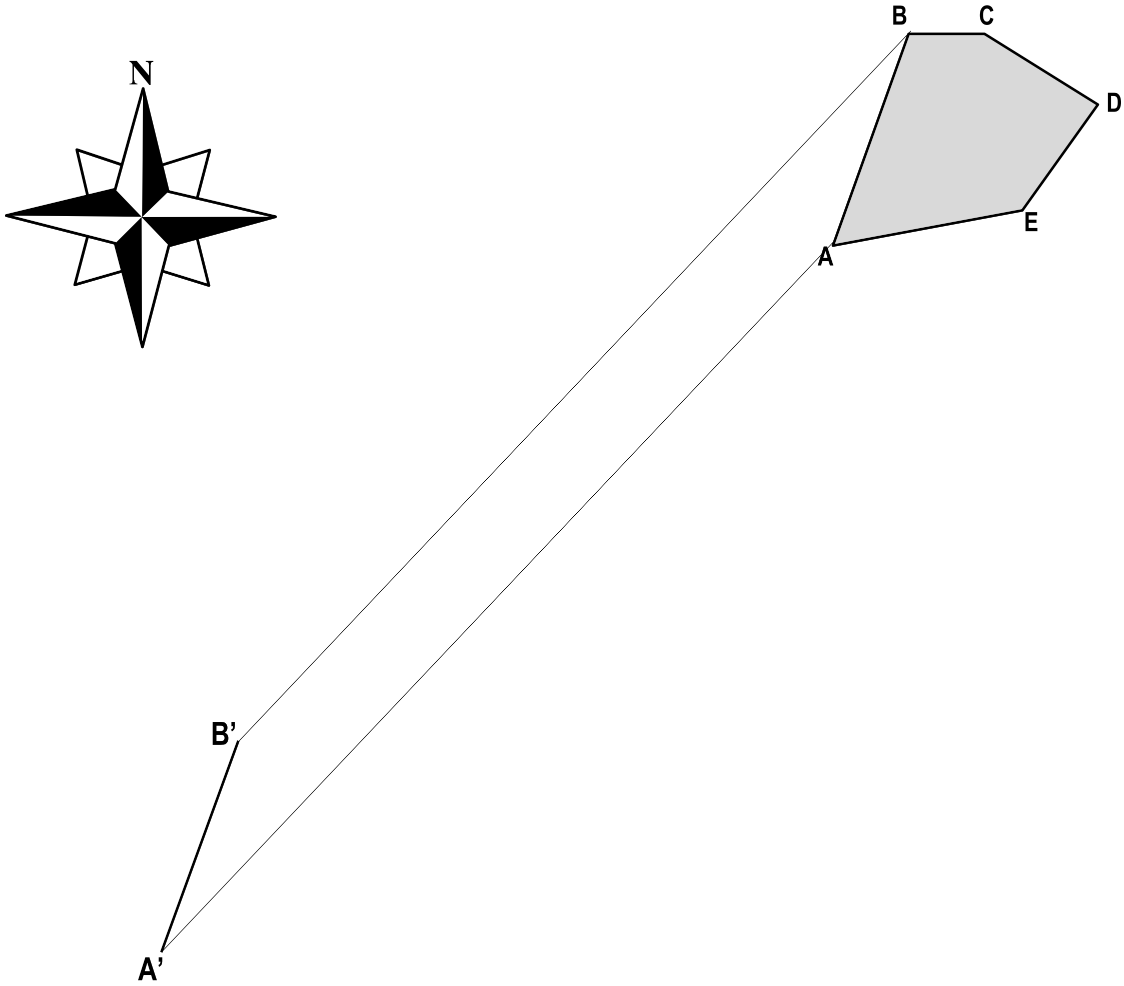
4] Pour chacune des figures ci-dessous, construis son image par la translation indiquée par la flèche.

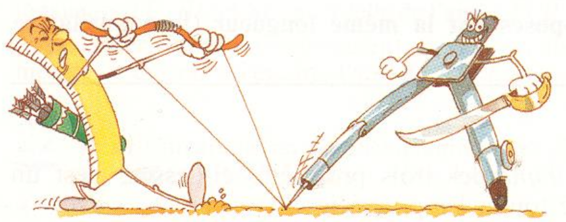


Exercices complémentaires :

Frédo a construit son bateau lui-même et navigue au cap sud-ouest.
Sachant qu'1 cm représente 2 mètres, on demande de dessiner la position de son bateau lorsqu'il aura parcouru 26 mètres.
Heureux que son embarcation ait été choisie comme modèle dans le cours de math. du collège St-Barthélemy, Frédo a voulu lui-même commencer le travail mais il a très vite abandonné.

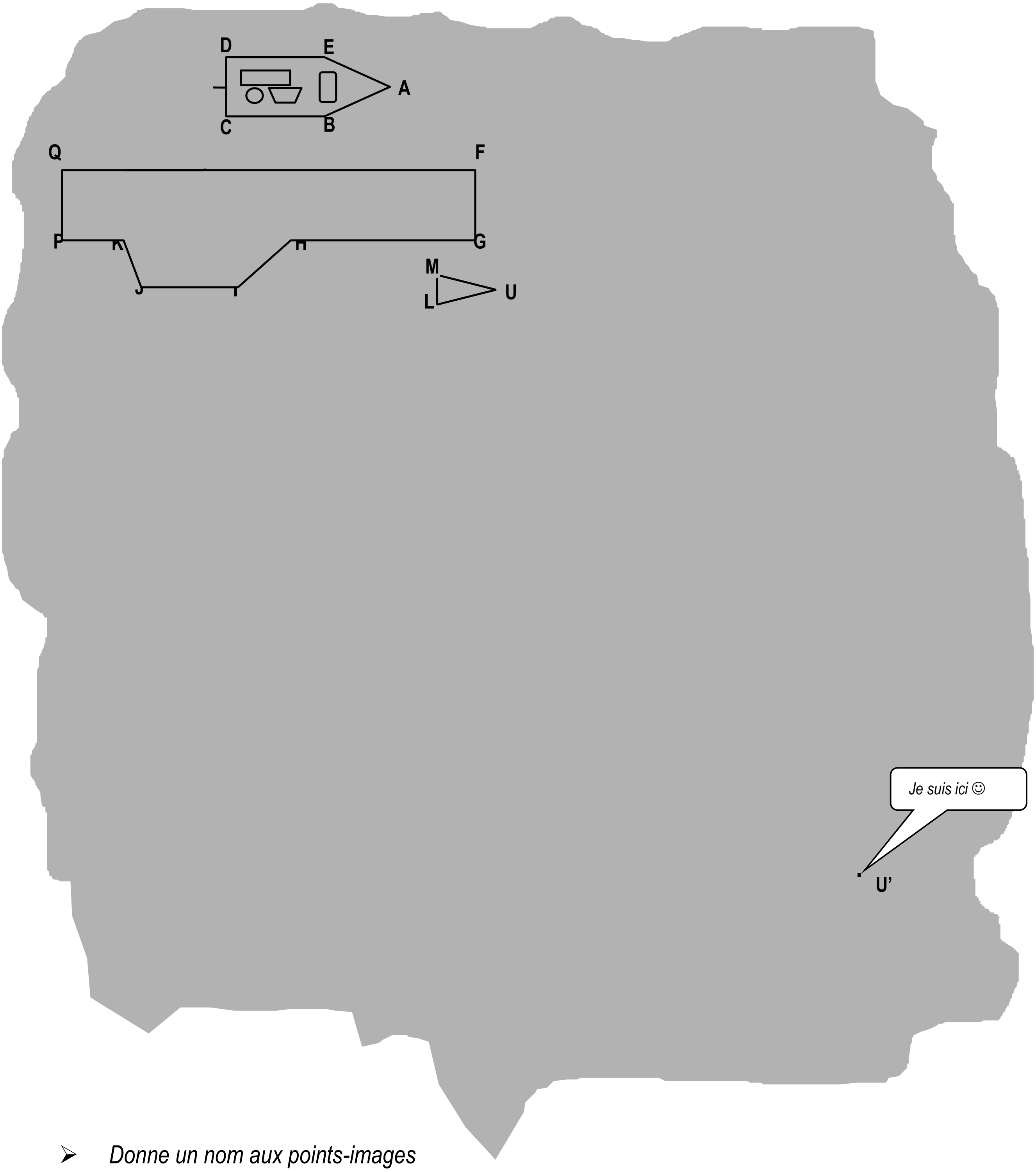
➢ *Termine son travail **avec précision**.*





Le capitaine Robinson se déplace dans le brouillard. Il calque sa route sur celle d'un porte-avions équipé d'un radar. Un U.L.M. perdu, les accompagne.
Le bateau et l'U.L.M. naviguent parallèlement au porte-avions et un courant marin du Nord les déporte tous vers le Sud.
A midi une éclaircie permet à un avion de reconnaissance d'apercevoir la pointe U' de l'U.L.M.

- *Dessine la position de l'U.L.M. et celle des autres bateaux à ce moment **avec précision**.*



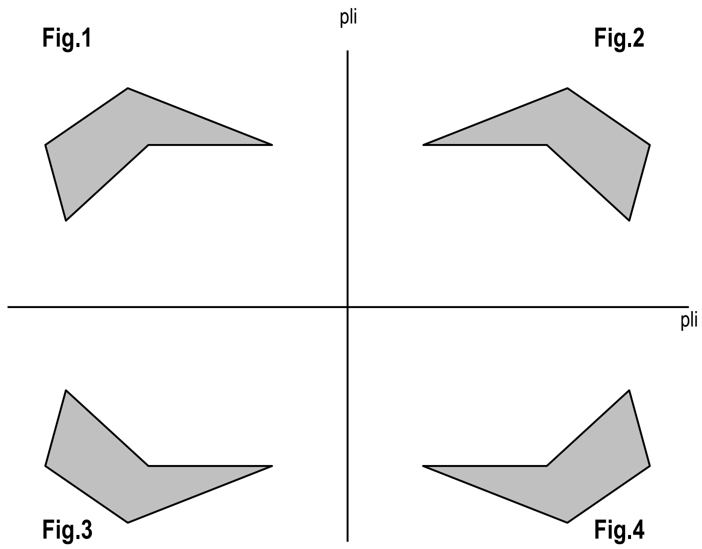
- *Donne un nom aux points-images*

2. LA SYMETRIE CENTRALE

2.1. Notion

Dans le cas de deux plis perpendiculaires, pour passer de la figure 1 à la figure 4, il faut faire tourner le pentagone d'un demi-tour autour d'un point (le point d'intersection des 2 plis). Ce déplacement s'appelle une **symétrie centrale**. Le point d'intersection des plis est appelé **centre de symétrie**.

Nomme **A, B, C, D et E** les sommets du pentagone de la fig.1 et **A', B', C', D' et E'** leur correspondant sur la fig.4. Appelle « **O** » le point d'intersection des plis.



- *Trace la droite **AA'**.*

    Que dire des points **A** et **A'** par rapport à **O** ?

    ....

    Si 0 est l'abscisse de **O**, que dire des abscisses de **A** et de **A'** ?

    ....

- *Trace la droite **BB'**.*

    Que dire des points **B** et **B'** par rapport à **O** ?

    ....

    Si 0 est l'abscisse de **O**, que dire des abscisses de **B** et de **B'** ?

    ....

- *Trace la droite **CC'**.*

    Que dire des points **C** et **C'** par rapport à **O** ?

    ....

    Si 0 est l'abscisse de **O**, que dire des abscisses de **C** et de **C'** ?

    ....

- *Trace la droite **DD'**.*
- *Trace la droite **EE'**.*

Conclusion

Tous les points de la figure image **A'B'C'D'E'** sont respectivement les symétriques des points du pentagone **ABCDE**.

Nous dirons que **A'B'C'D'E'** est le symétrique de **ABCDE** par rapport au point **O**.

Nous venons de découvrir la **symétrie centrale**. Le point **O** sera appelé centre de la symétrie centrale.

La symétrie centrale est un déplacement car ***il ne faut pas sortir du plan de la feuille*** pour effectuer le demi-tour.

2.2. Définition et notation

Nous retiendrons

1] **La définition de la symétrie centrale.**

Une symétrie centrale est un déplacement défini par un point appelé centre de la symétrie. Ce point est le milieu du segment [objet-image].

2] **La notation**

$\mathcal{S}_O(A) = B$ signifie que le point **B** est l'image du point **A** par la symétrie centrale de centre **O.**

2.3. Construction

Tu vas maintenant rédiger un message expliquant comment construire l'image d'un point par une symétrie centrale donnée. Pour ta facilité, observe la situation représentée ci-dessous.

*Pour construire l'image du point **A** par la symétrie centrale définie par le centre O, tu dois*

1]

....

2]

....

3]

....

. A

O .

Consignes de construction retenues après mise en commun

*Pour construire l'image du point **A** par la symétrie centrale définie par le centre O, je dois*

1] ....

....

2] ....

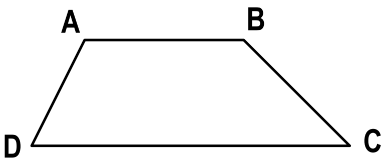
....

3] ....

....

<u>Exercices</u>

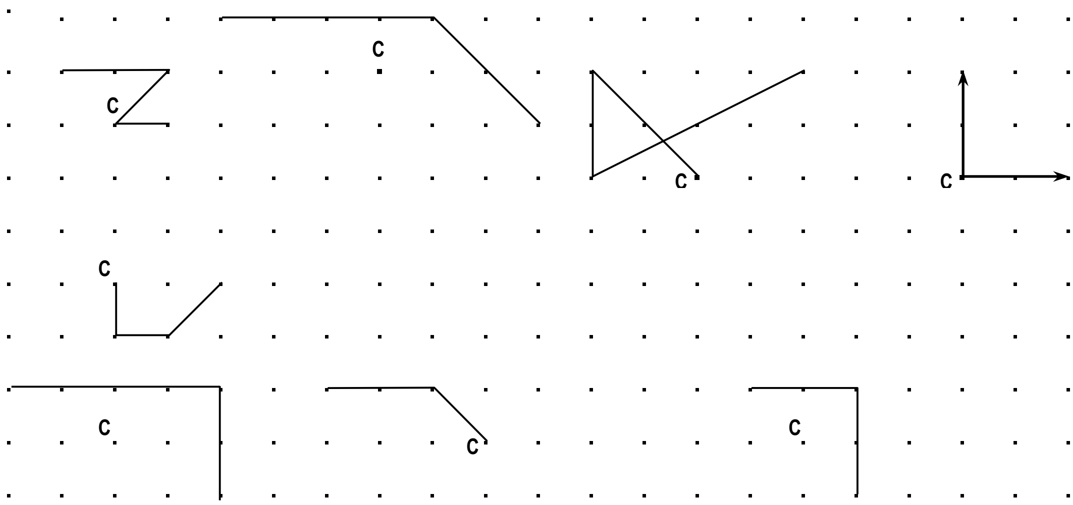
1] Construis l'image du trapèze **ABCD** par la symétrie centrale $\mathcal{S}_O$.



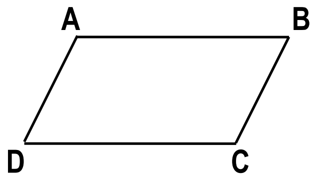
<u>Légende</u>

. O

2] Pour chacune des figures ci-dessous, construis son image par la symétrie centrale de centre **C**.

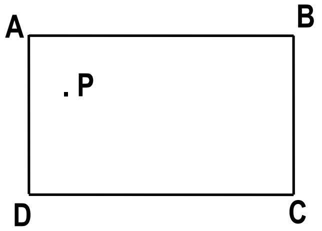


3] Construis l'image du parallélogramme **ABCD** par la symétrie centrale S_C.

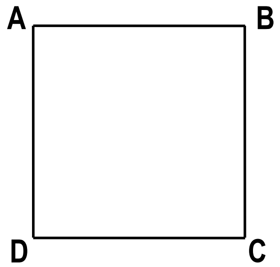


4] Construis l'image du rectangle **ABCD** par S_P.

<u>Légende</u>



5] Construis l'image du carré **ABCD** par la symétrie de centre **O**. Le point **O** est à l'intersection des diagonales du carré.



2.4. Invariants

L'observation des images construites, nous montre que la forme et la taille des figures n'ont pas changé durant leur déplacement.

Nous dirons que l'objet et son image sont **isométriques**.

En effet, ils ont conservé

- ....
- ....
- ....
- ....
- ....
- ....
- ....

⇒ Toutes ces caractéristiques seront appelées des INVARIANTS pour la **symétrie centrale**, car elles n'ont pas changé durant le déplacement.

N.B. Le sens est ....

Quelles différences y a-t-il entre les invariants de la symétrie centrale et ceux de la translation ?

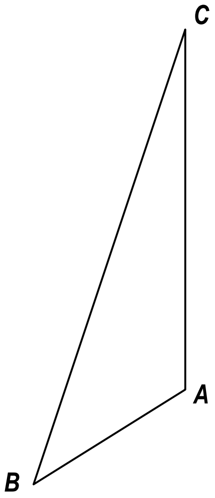
....

....

Utilisation des invariants

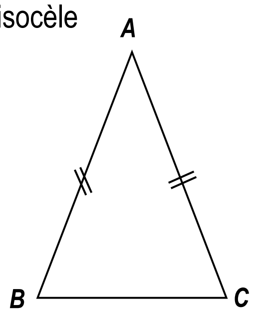
- Construis l'image du triangle ABC par la symétrie centrale de centre M, milieu de [BC] dans chacun des cas suivants puis note le nom du quadrilatère ainsi obtenu :

1] Triangle ABC scalène



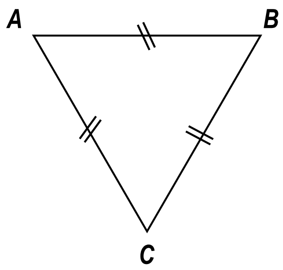
Quadrilatère obtenu :

2] Triangle ABC isocèle



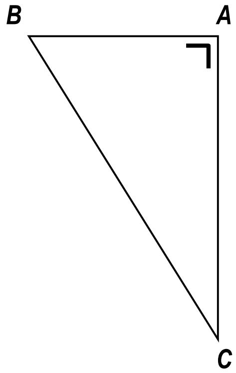
Quadrilatère obtenu :

3] Triangle ABC équilatéral



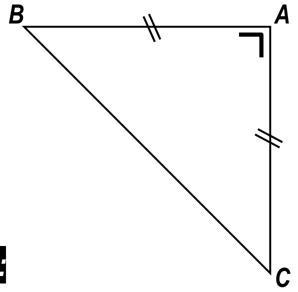
Quadrilatère obtenu :

4] Triangle ABC rectangle



Quadrilatère obtenu :

5] Triangle ABC rectangle isocèle



Quadrilatère obtenu :

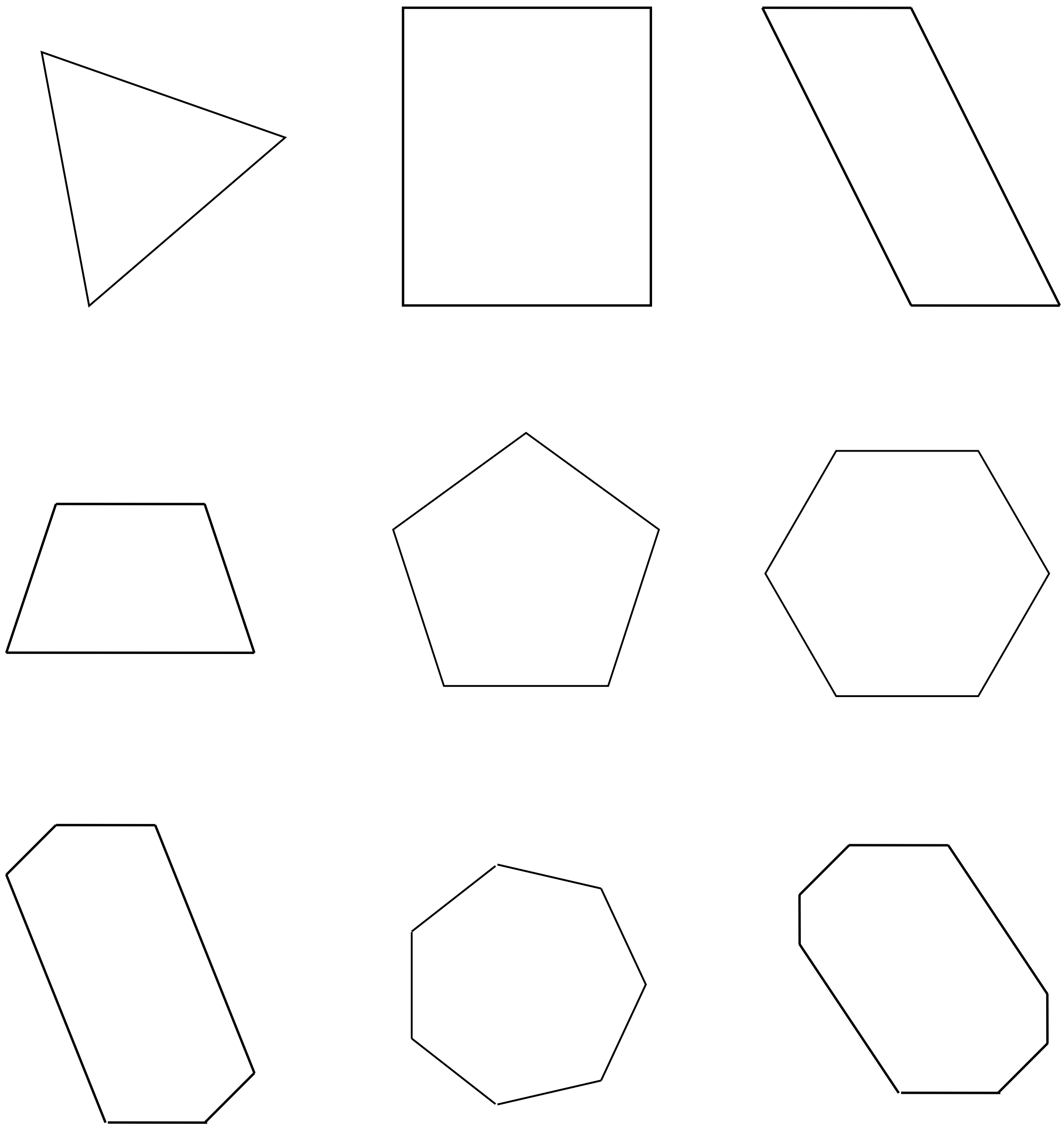
- Utilise les invariants pour indiquer sur chaque figure les égalités obtenues.
- Pour chaque quadrilatère obtenu, dresse une liste de ses propriétés sur feuille annexée.

2.5. Centre de symétrie

Place la feuille 11 de ton voisin à côté de celle-ci.

A l'exercice 4, tu n'as pas dû dessiner une nouvelle figure car elle était déjà sa propre image.
Pour cette raison, nous dirons que le point **O** est son **centre de symétrie**.

1] Voici plusieurs figures représentées.



Situe leur centre de symétrie s'il existe.

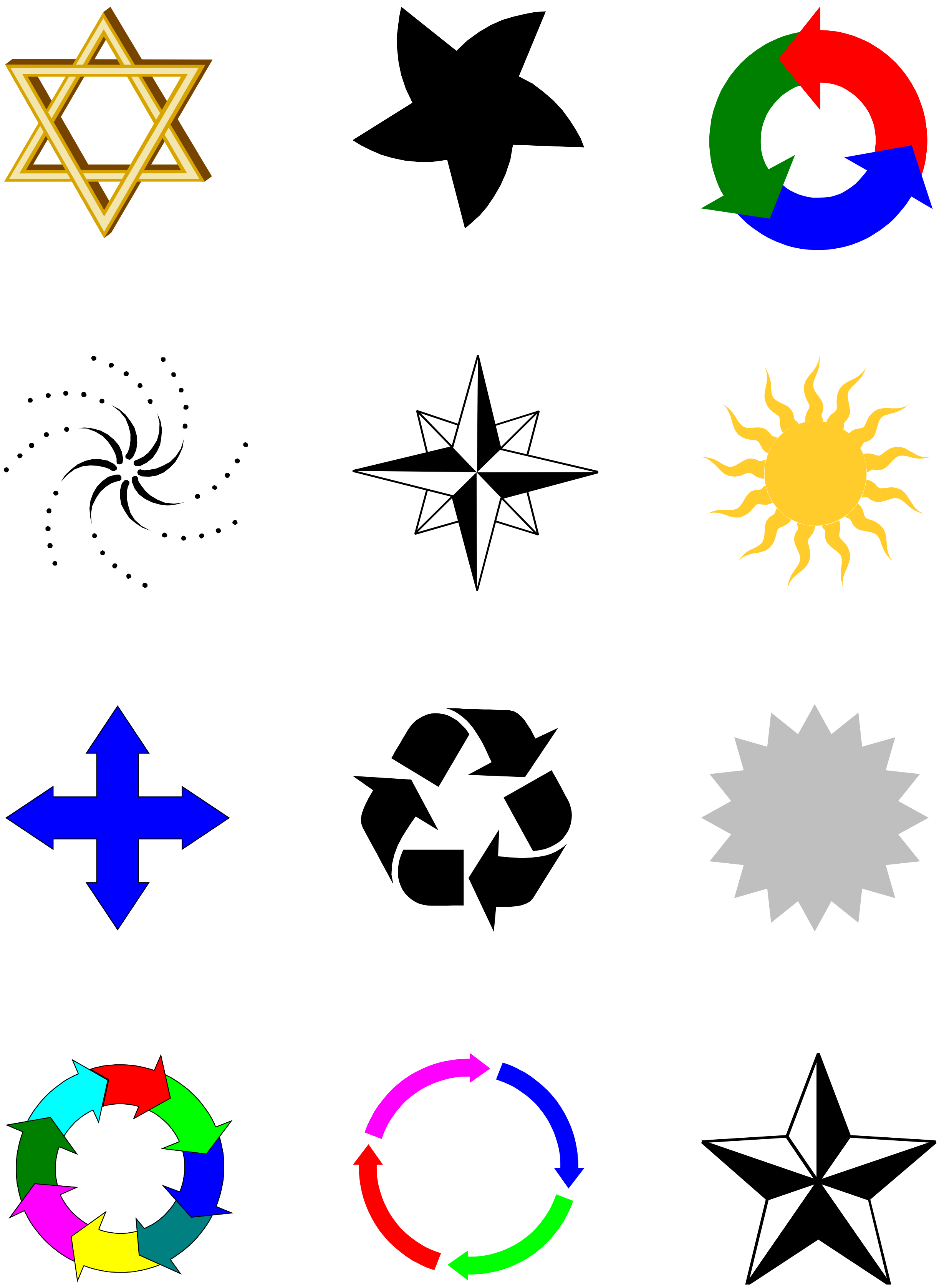
Cite une condition nécessaire pour qu'une figure ait un centre de symétrie

....

Cette condition est-elle suffisante ? OUI - NON
Justifie ton choix.

....

2] Pour chaque figure, situe leur centre de symétrie s'il existe.



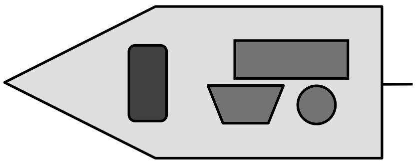
3. SYMETRIE AXIALE

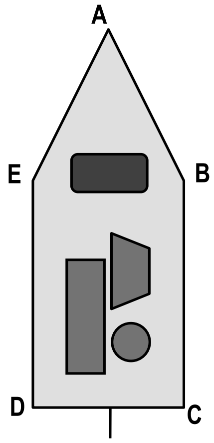
3.1. Notion

La figure suivante représente un bateau et son image par une **symétrie axiale**. Tu peux les superposer en pliant la feuille suivant une droite. On peut imaginer que le bateau de gauche est le reflet du bateau de droite dans un miroir posé sur cette droite (le pli) ou l'inverse.

Représentons le miroir.

Ce que le bateau est devenu





Le bateau au départ

- ✓ Sors cette feuille du classeur et plie-la pour que le bateau et son image coïncident.
- ✓ Déplie la feuille et trace, entre les deux bateaux, la droite formée par ce pli.
- ✓ Appelle-la **d**.
- ✓ Note **A'B'C'D'E'** les images des points **ABCDE**.

Concentrons-nous sur le point **A** et son image **A'**.

Comment sont situés ces deux points par rapport à l'axe ?

- ➢ ....
- ➢ ....
- ➢ ....

Quelles consignes donnerais-tu à ton voisin pour qu'il puisse construire l'image d'un point par une symétrie axiale ?

Cher ……………..,
*Pour construire l'image du point **X** par la symétrie axiale définie par l'axe **a**, tu dois*

1]

……

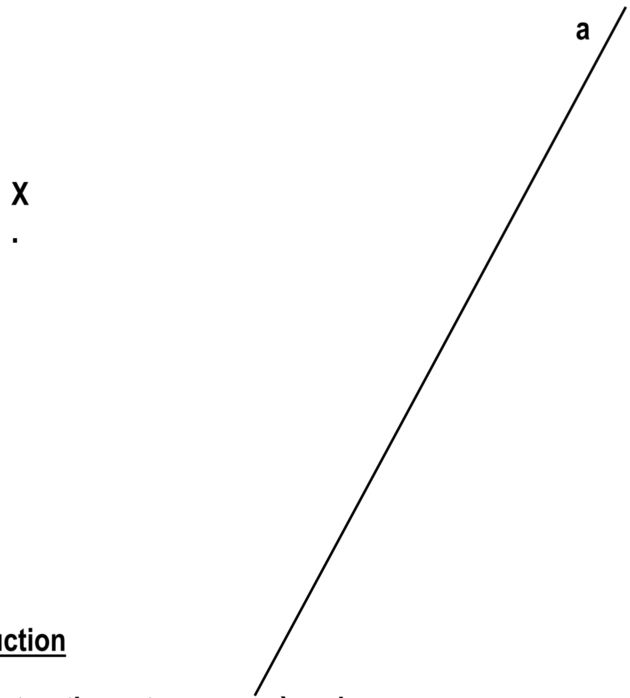
2]

……

3]

……

- Maintenant, utilise méthodiquement tes consignes et vois si elles te permettent de construire l'image du point **X**. Au besoin, rectifie ton message.



<u>3.2. Construction</u>

Consignes de construction retenues après mise en commun

*Pour construire l'image du point **X** par la symétrie définie par l'axe **a**, je dois*

1] ……

……

2] ……

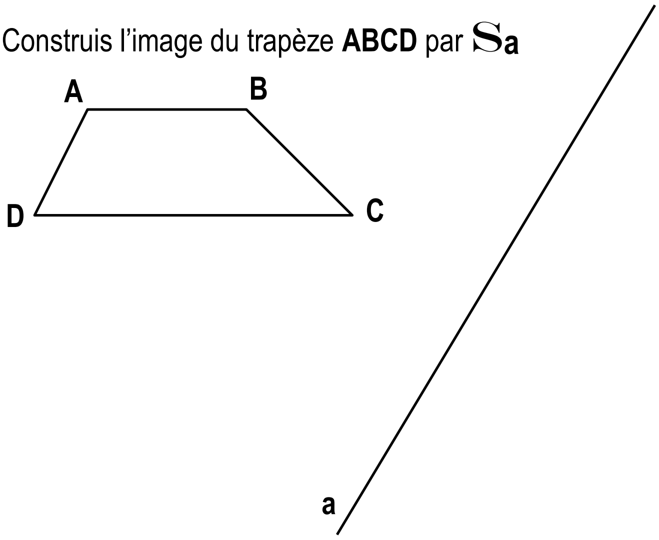
……

3] ……

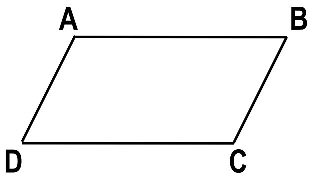
……

Exercices

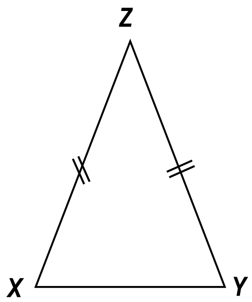
1] Construis l'image du trapèze **ABCD** par S_a



2] Construis l'image du parallélogramme **ABCD** par la symétrie d'axe **BC**



3] Construis l'image du triangle isocèle **XYZ** par la symétrie d'axe **XY**. Quel quadrilatère obtiens-tu ?



- Utilise les invariants pour indiquer sur ce quadrilatère les égalités obtenues.
- Dresse une liste de ses propriétés sur feuille annexée.

3.3. Définition et notation

Comme pour les transformations précédentes (translation et symétrie centrale), peut-on encore **déplacer** la figure sur son image en la faisant glisser dans le plan de la feuille ? OUI - NON
C'est la raison pour laquelle nous dirons que la symétrie axiale est un **retournement**.

Nous retiendrons

1] **La définition de la symétrie axiale.**

Une symétrie axiale est un retournement défini par un axe qui est perpendiculaire au segment [objet-image] en son milieu.

2] **La notation**

$\mathcal{S}_a(\mathbf{X}) = \mathbf{Y}$ signifie que le point **Y** est l'image du point **X** par la symétrie axiale **s** dont l'axe est **a**.

3.4. Invariants

L'observation des images construites, nous montre que la forme et la taille des figures n'ont pas changé durant leur retournement.

Nous dirons que l'objet et son image sont **isométriques**.
En effet, ils ont conservé

- ....
- ....
- ....
- ....
- ....
- ....
- ....

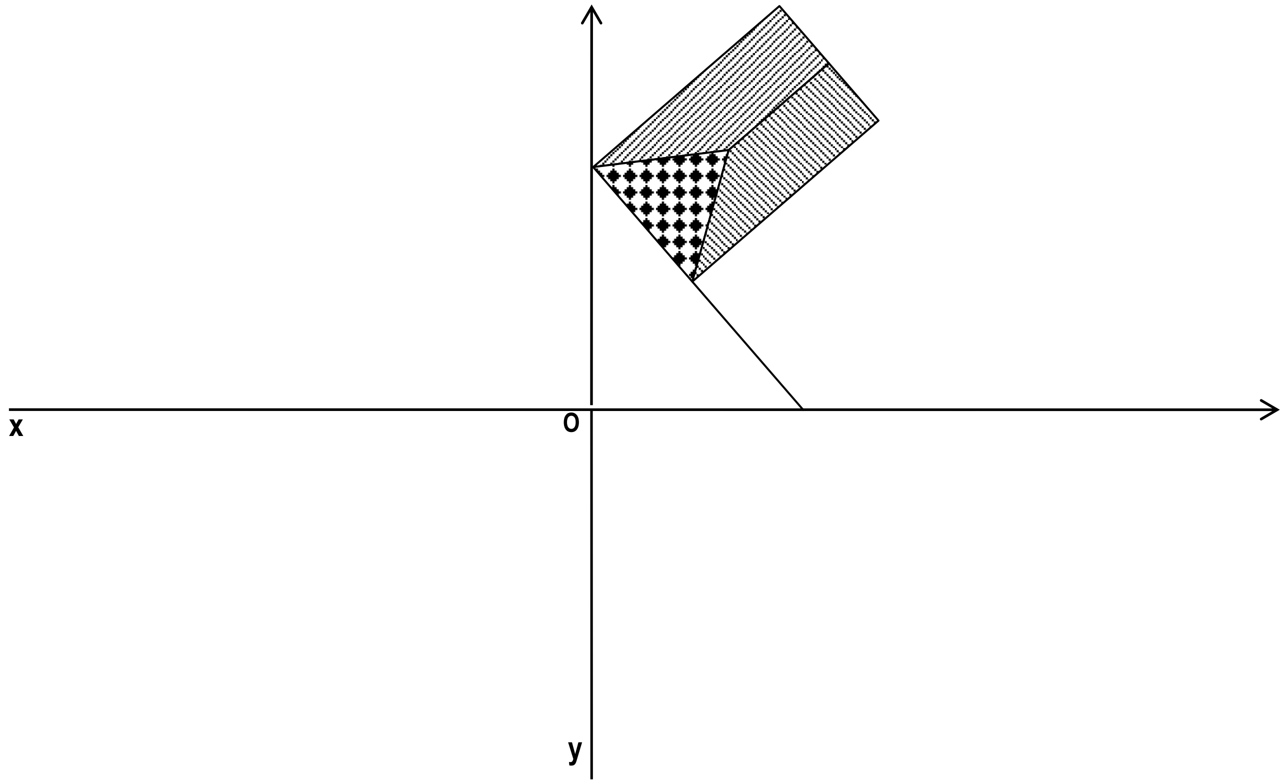
$\Rightarrow$ Toutes ces caractéristiques seront appelées des INVARIANTS pour la **symétrie axiale**, car elles n'ont pas changé durant le retournement.

Comparons les invariants d'une figure par rapport à son image pour les quatre transformations étudiées.

Invariants	Translation	Symétrie centrale	Symétrie axiale
L'alignement des points			
La direction			
Le sens			
La distance			
Le parallélisme			
L'amplitude des angles			
La perpendicularité			
L'aire			

Application

1] Dessine l'image du drapeau par la symétrie d'axe **x**. *(Utiliser les invariants peut te faire gagner du temps.)*



2] Supposons que la droite **y** représente le bord d'un miroir vertical.

Dessine l'image du drapeau dans ce miroir.

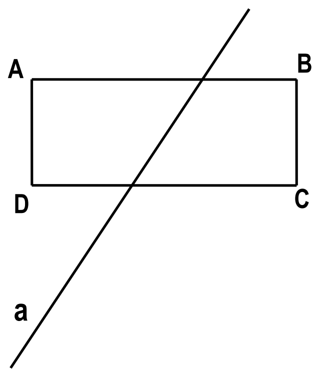
3] Compare les deux images obtenues

....

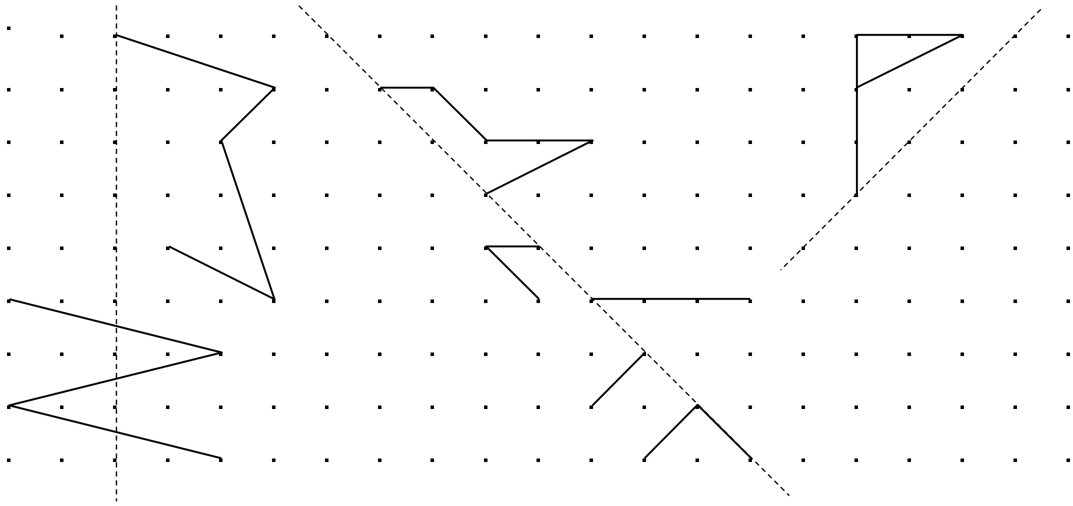
Exercices hors contexte

1] Représente l'image du rectangle **ABCD** par la symétrie d'axe **a** et note la légende.

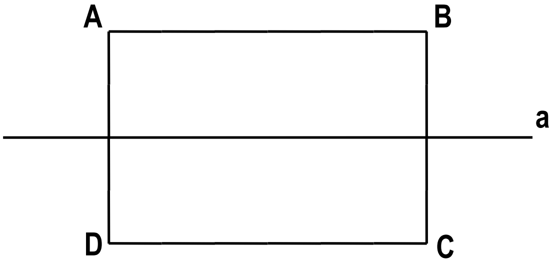
Légende

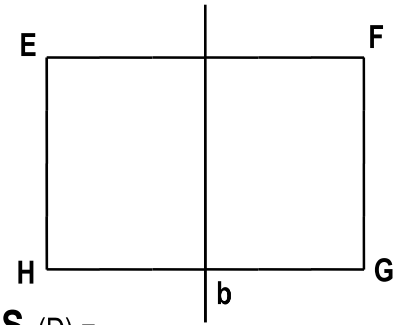


2] Pour chacune des figures ci-dessous, construis son image par la symétrie axiale dont l'axe est donné en pointillé.



3] Construis $\mathbf{S}_a$(ABCD) et $\mathbf{S}_\mathbf{b}$(EFGH).





Complète : $\mathbf{S}_\mathbf{a}$(A) = … $\mathbf{S}_\mathbf{a}$(B) = … $\mathbf{S}_\mathbf{a}$(C) = … $\mathbf{S}_\mathbf{a}$(D) = …

$\mathbf{S}_\mathbf{b}$(E) = … $\mathbf{S}_\mathbf{b}$(F) = … $\mathbf{S}_\mathbf{b}$(G) = … $\mathbf{S}_\mathbf{b}$(H) = …

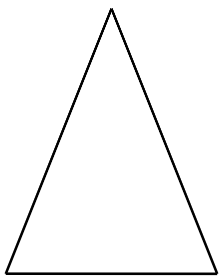
Pour les deux derniers exercices, tu n'as pas dû dessiner de nouvelle figure car elle était sa propre image ; « *elle retombe sur elle-même* ».

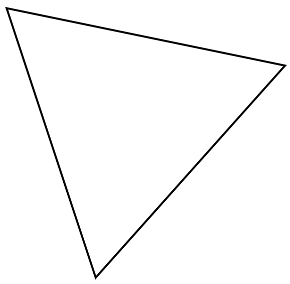
Pour cette raison, nous dirons que la droite **a** est leur axe de symétrie et aussi que ces figures sont symétriques.

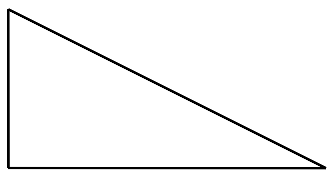
Une figure est symétrique ssi elle possède au moins un axe de symétrie.

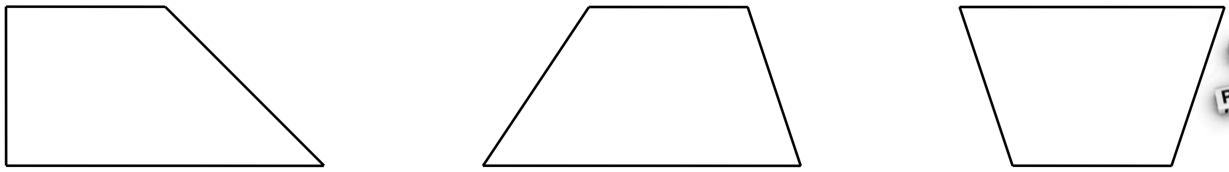
<u>Exercices</u>

Ecris sous chaque figure le nombre d'axes de symétrie qu'elle possède.
Dessine alors pour chacune d'elles l'axe ou les axes de symétrie qui justifient ton choix.

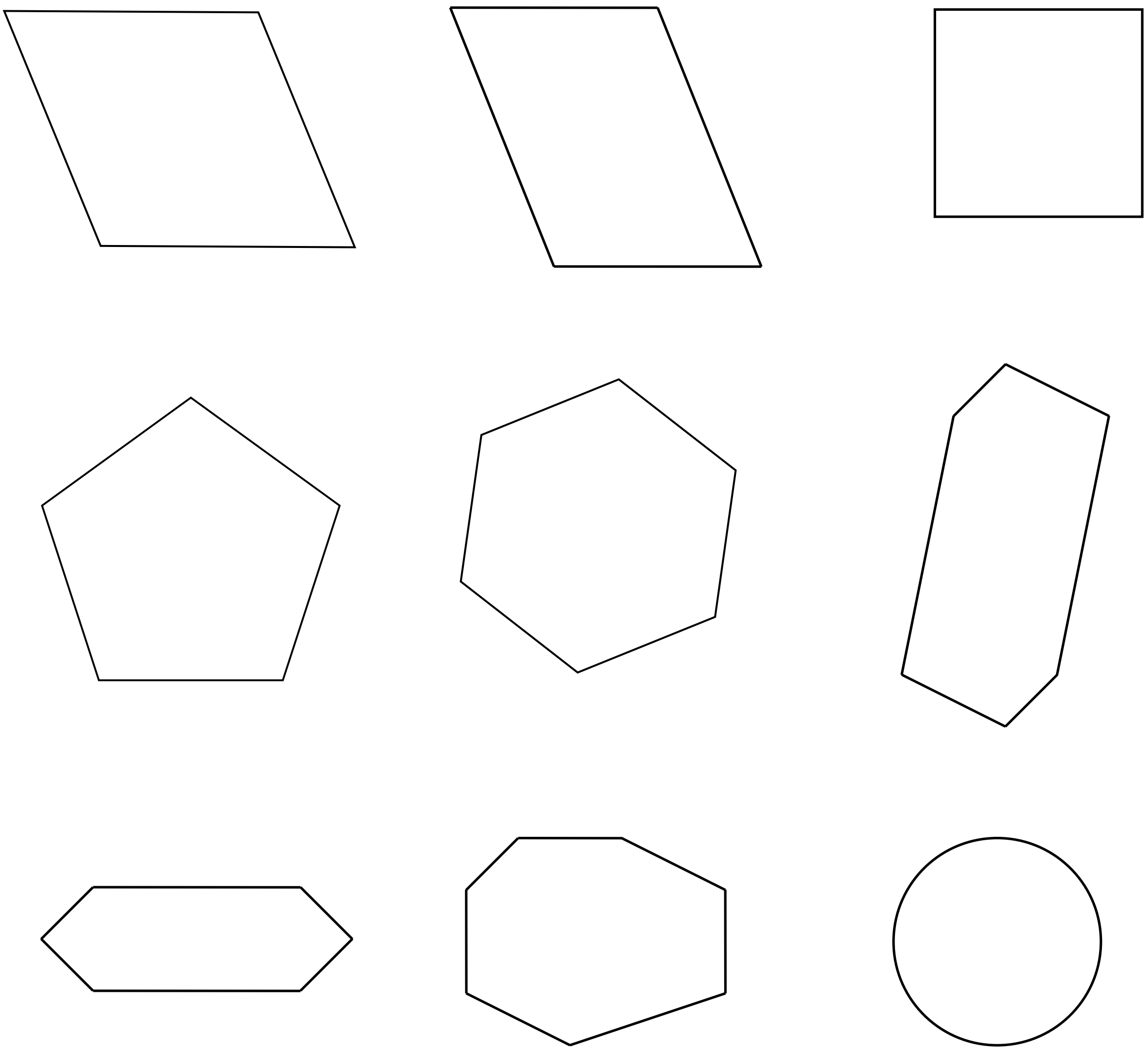


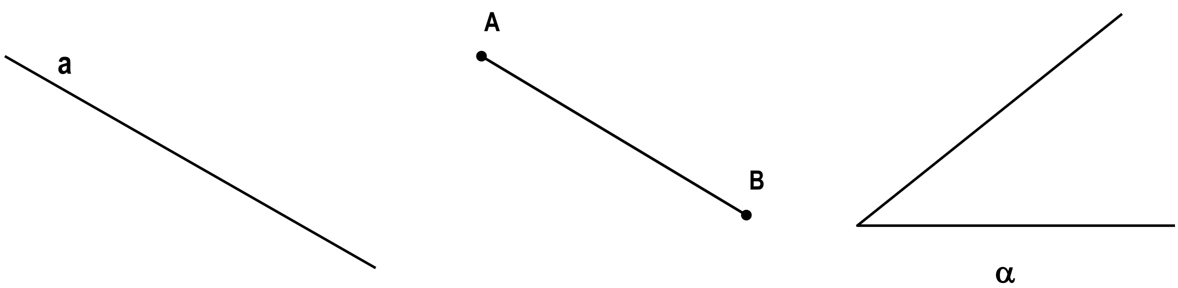


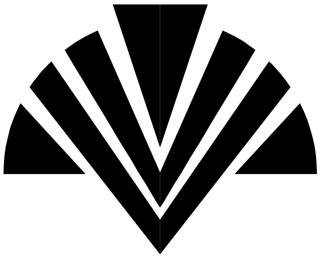
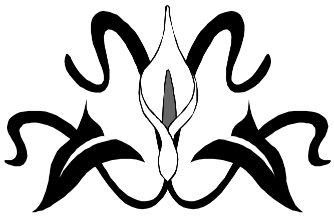


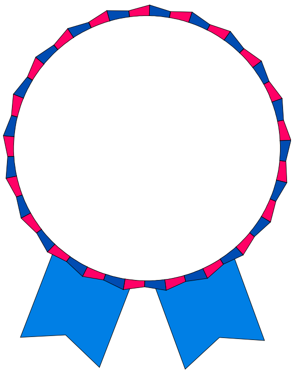
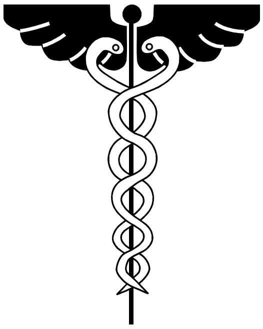
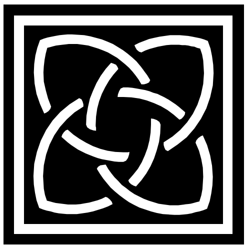
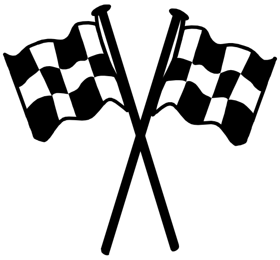
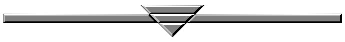


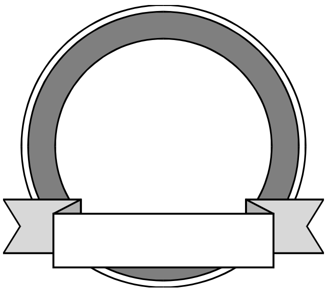
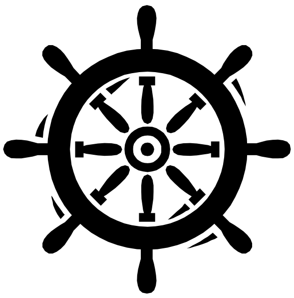
Si tu éprouves des difficultés à construire les axes, tu peux plier ta feuille.





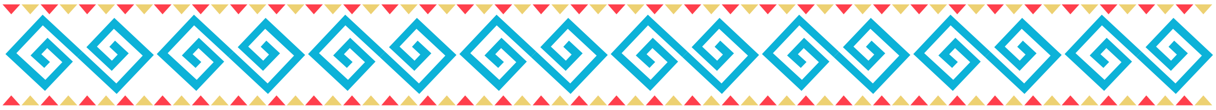



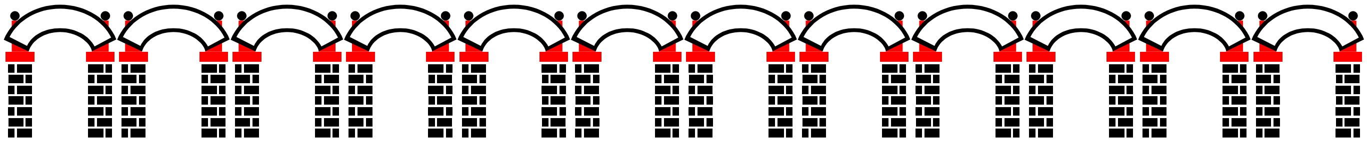







4. EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

1] Trace le(s) axe(s) et le(s) centre(s) de symétrie des frises ci-dessous (elles se prolongent indéfiniment dans les deux sens).

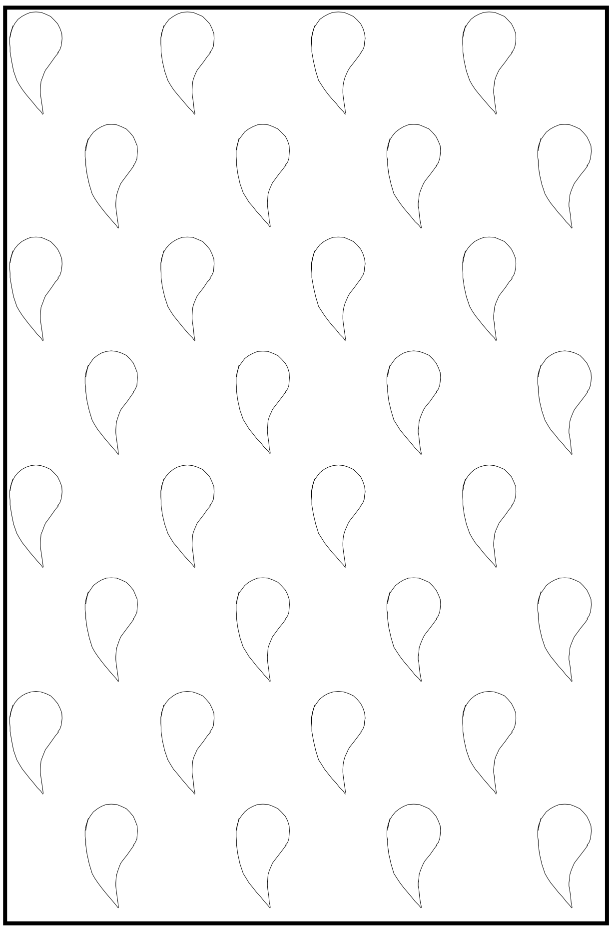


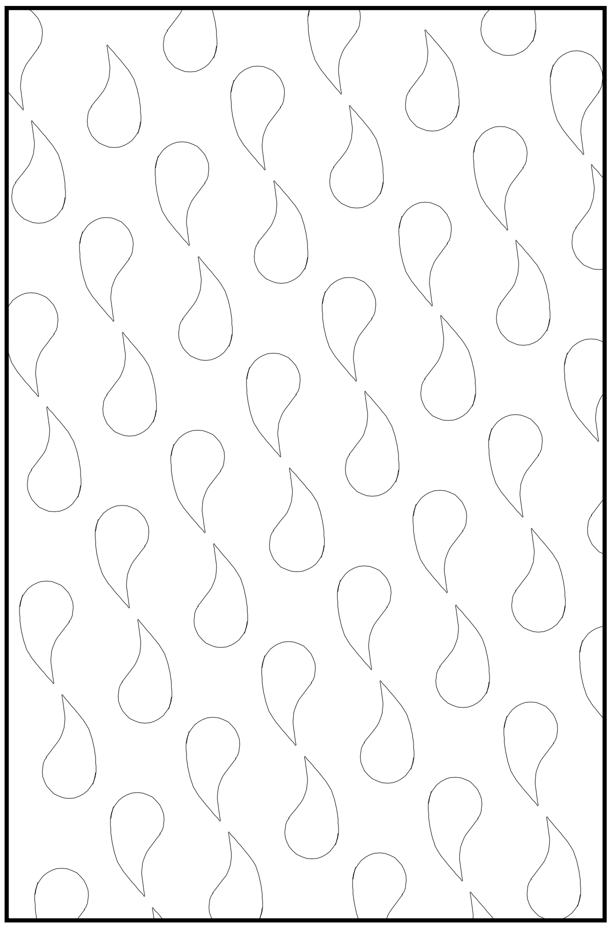


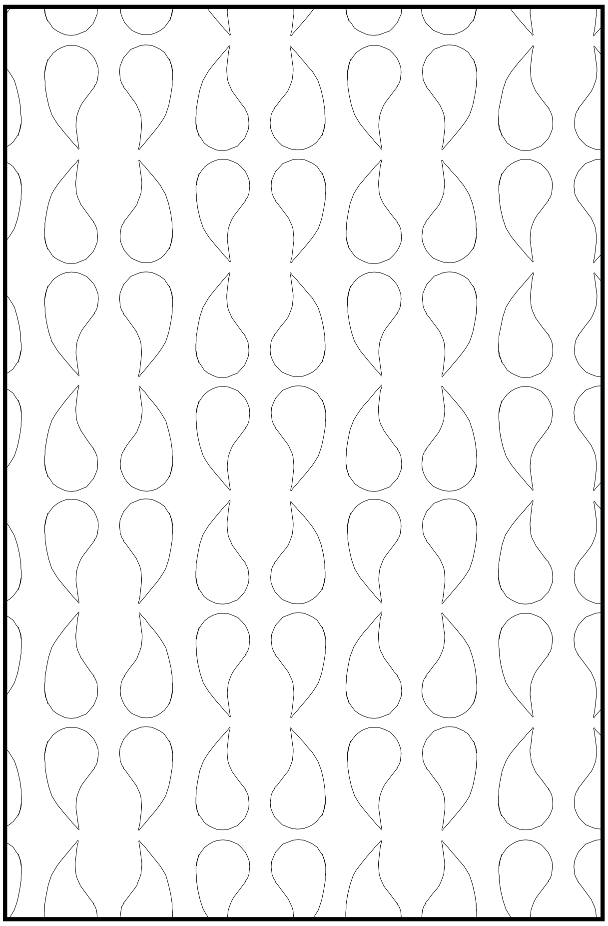
2] Voici 5 papiers peints. Tu y vois des motifs images d'autres par des translations, des symétries axiales ou centrales. Trace sur chacun des papiers peints

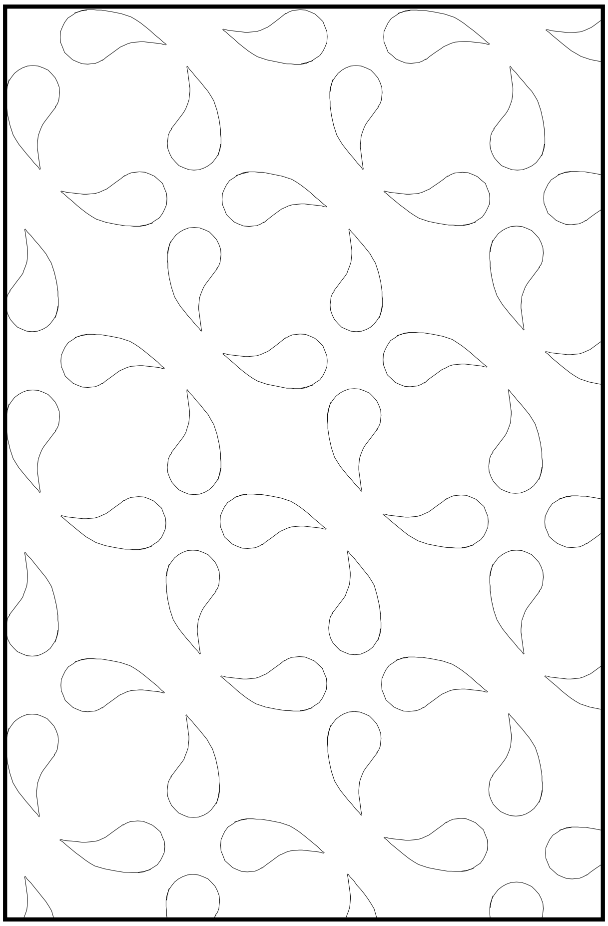
- des translations et leur vecteur ;
- des symétries axiales et leur axe ;
- des symétries centrales et leur centre

qui laisse les papiers peints invariants.



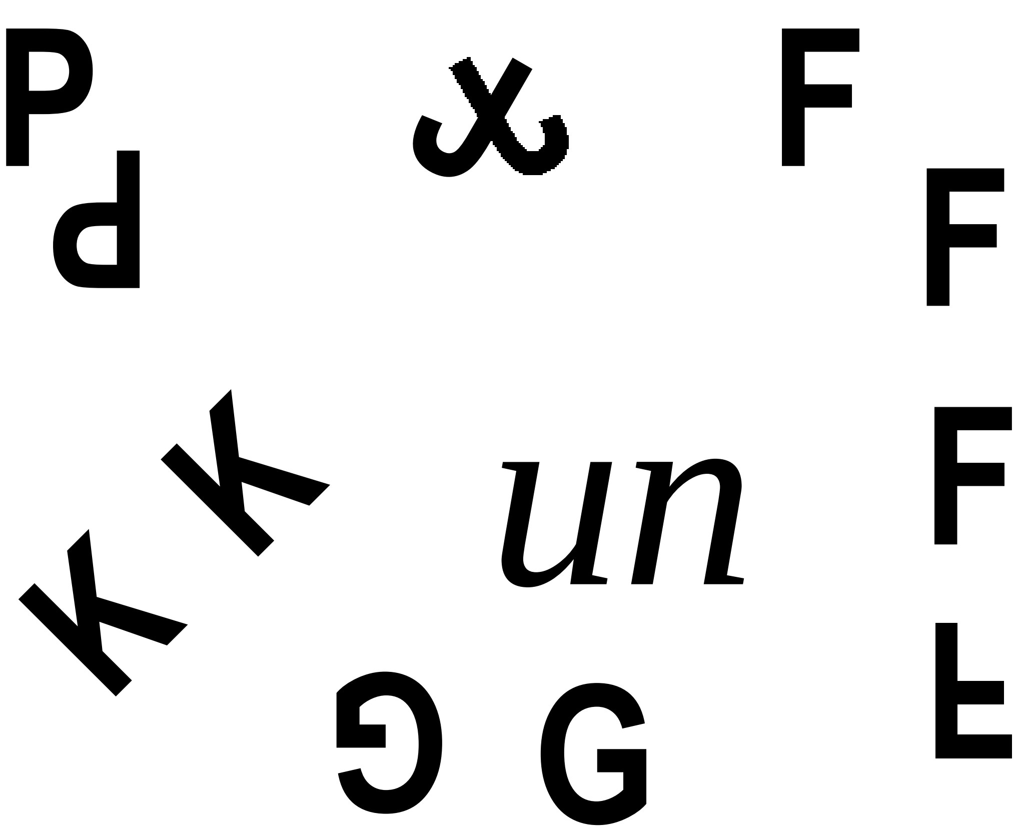






3] Sous chacune des paires de lettres de la Figure ci-dessous, note la transformation qui applique l'une sur l'autre et dessine, selon le cas :

- son axe
- son centre
- son vecteur (flèche)



4] Construis sur la page suivante les images du triangle ABC en effectuant les opérations suivantes sur ses coordonnées. Nomme dans la chaque cas la transformation.

a) Triangle ABC : $(x ; y)$ ⇨ Triangle $A_1B_1C_1$: $(x - 2 ; y - 3)$

Nom de la transformation :

b) Triangle ABC : $(x ; y)$ ⇨ Triangle $A_2B_2C_2$: $(x ; -y)$

Nom de la transformation :

c) Triangle ABC : $(x ; y)$ ⇨ Triangle $A_3B_3C_3$: $(-x ; y)$

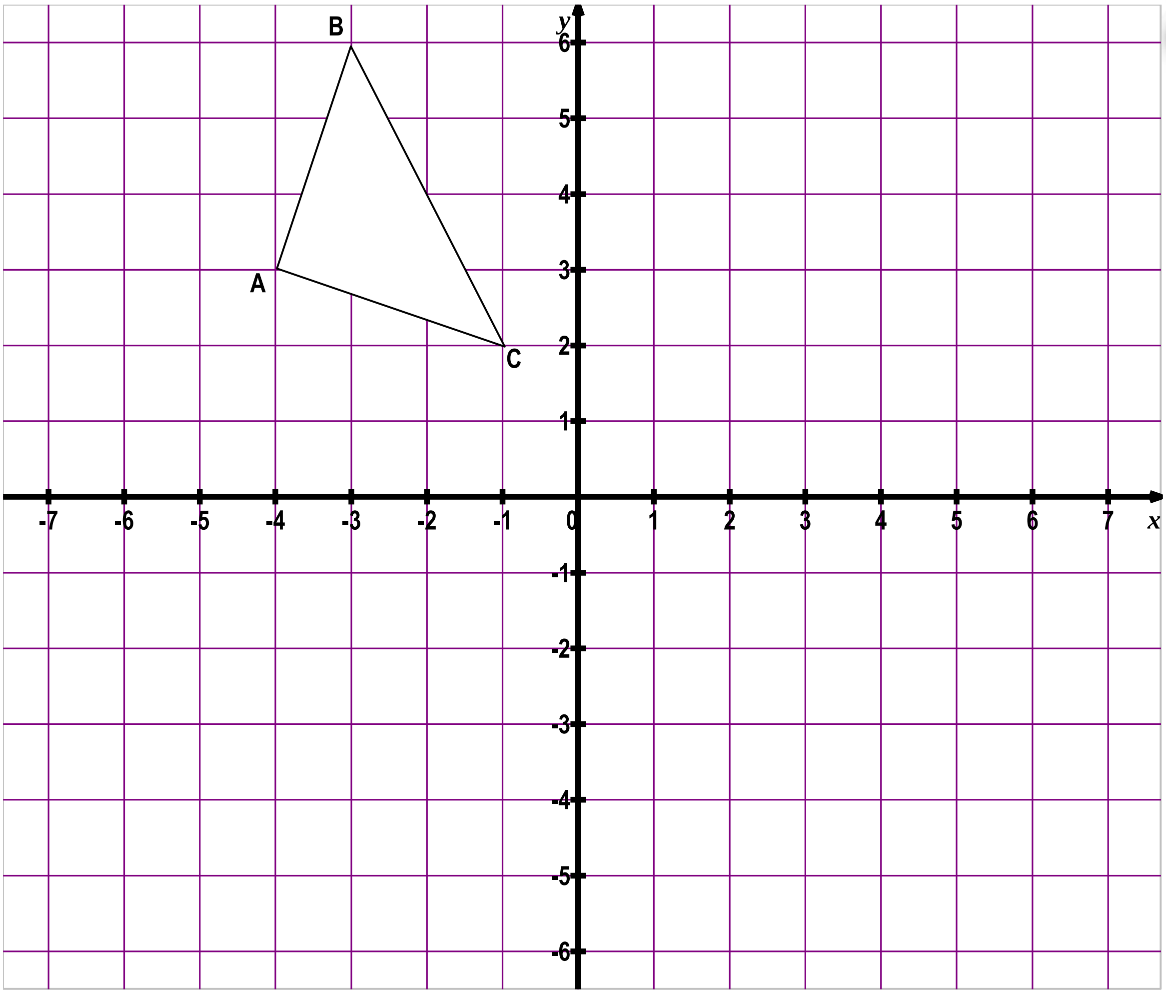
Nom de la transformation :

d) Triangle ABC : $(x ; y)$ ⇨ Triangle $A_4B_4C_4$: $(x ; -y)$

Nom de la transformation :

e) Triangle ABC : $(x ; y)$ ⇨ Triangle $A_5B_5C_5$: $(x + 7 ; y - 4)$

Nom de la transformation :


A
B
C
x
y
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
6 5 4 3 2 1 -1 -2 -3 -4 -5 -6