COLLEGE SAINT-BARTHELEMY

MATHEMATIQUE

PREMIERE ANNEE

LES NOMBRES

Troisième partie : Les nombres rationnels

Fractions – Décimaux - Pourcentages
Compositions de fractionnements

ANNEE SCOLAIRE 202… – 202…

Compétences

Expliciter les savoirs et les procédures

- Maitriser les conventions d'écriture mathématique des opérations avec des rationnels.
- Justifier une méthode de calcul en utilisant les propriétés des opérations (y compris la distributivité) en L.L. ou L.M..
- Reconnaitre les circonstances d'utilisation des termes usuels, des notations et des opérations propres aux nombres.
- Vérifier avec une calculatrice la plausibilité d'un résultat.
- Associer l'idée de « est avant », « est sur » et « est après » sur la droite graduée à la notion « est plus petit que », « est égal à » ou « est plus grand que » dans un ensemble de nombres.
- Maitriser les conventions d'écriture mathématique des fractions et des nombres décimaux.

Appliquer une procédure

- Respecter les priorités des opérations pour effectuer des opérations dans des situations variées.
- Estimer l'ordre de grandeur d'un résultat avant d'opérer.
- Effectuer un calcul comportant plusieurs étapes à l'aide d'une calculatrice.
- Dénombrer par un calcul et le cas échéant par une formule.
- Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées avec des rationnels.
- Ordonner et comparer des nombres rationnels.
- Utiliser les fractionnements les plus courants d'un objet réel ou représenté.
- Ordonner et comparer des fractions ou des nombres décimaux.
- Représenter des fractions sur une droite graduée.
- Associer un point et son abscisse sur un axe.
- Associer un point et ses coordonnées sur un quadrillage.

EXPLORATION : INTRODUCTION AUX NOMBRES RATIONNELS

1. Construire une droite graduée sur laquelle tu peux placer toutes les fractions suivantes. Classe, ensuite ces fractions dans l'ordre croissant.

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{4}{6}, \frac{-3}{2}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{4}{3}, \frac{-5}{6}, 2, -1, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}$$

2. Dans une classe, $\frac{3}{4}$ des élèves jouent au football, $\frac{5}{7}$ jouent au tennis. Quel est le sport le plus pratiqué ?

3. Dans l'école, 80% des élèves de 2ème ne prennent pas de dîner chaud pour le 1er trimestre, alors qu'ils sont $\frac{57}{71}$ pour le 2ème trimestre. A quelle période y-a-t'il le plus d'élèves au dîner chaud ?

4. Classe les nombres suivants dans l'ordre croissant.

0,261 $-\frac{1}{4}$ 17% $\frac{57}{71}$ -0,25…25… $\frac{1}{3}$ 26,01% -0,26 $\frac{1}{4}$ 0,25…25…

5. Inspire toi de l'exemple ci-dessous pour faire apparaitre, dans les fractions suivantes, leur partie entière :

<u>Exemple</u> : $\frac{27}{5} = 5 + \frac{2}{5}$

1] $\frac{24}{5}$	2] $\frac{22}{7}$	3] $\frac{143}{11}$	4] $\frac{103}{9}$
5] $\frac{100}{11}$	6] $\frac{27}{3}$	7] $\frac{257}{80}$	8] $\frac{60}{17}$

6. Encadre les fractions suivantes par deux nombres entiers consécutifs.

1] …… < $\frac{5}{6}$ <……	2] …… < $\frac{15}{6}$ < ……	3] …… < $\frac{25}{6}$ < ……
4] …… < $\frac{35}{6}$ < ……	5] …… < $\frac{45}{6}$ < ……	6] …… < $\frac{55}{6}$ < ……

7. Tu peux écrire : $4{,}7 = 4 + \frac{7}{10}$. Fais de même avec les nombres décimaux suivants :

1] 3,8 2] 4,6 3] 17,03 4] 7,554

8. Ecrire la fraction irréductible correspondante

0,6 =	2,3 =	0,45 =	13,13 =	0,25 =	0,125 =	0,01 =	0,02 =
0,008 =	0,08 =	0,8 =	8,8 =	8,08 =	8,88 =	88,8 =	88 =

CHAPITRES 4 : DE NOUVEAUX NOMBRES…
LES RATIONNELS

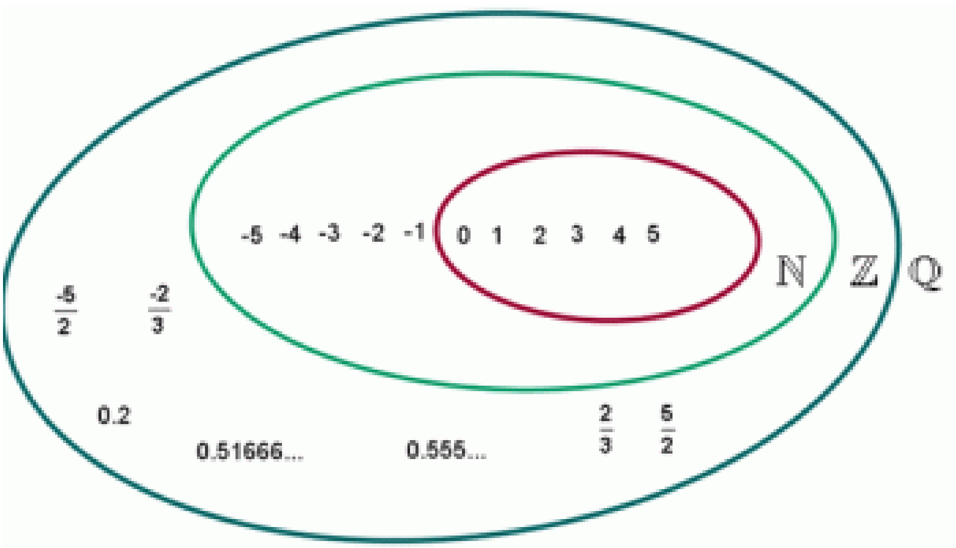
1. NOMBRES RATIONNELS – ENSEMBLES DE NOMBRES

Sans t'en rendre compte, tu viens d'utiliser d'autres nombres : les nombres rationnels.

L'ensemble des nombres rationnels est l'ensemble de tous les nombres que tu peux écrire sous forme de fractions à termes entiers (positives ou négatives). Il est noté $\mathbb{Q}$.

Par conséquent, les nombres naturels, les nombres entiers sont tous des rationnels ($-2 = -\frac{4}{2}$) . A ceux-ci s'ajoutent tous les nombres décimaux limités (1,25 ; 0,173 ;…) et les nombres décimaux illimités périodiques (0,333333…3… ; 3,245656…56…. ; etc.).

Voici une représentation des différents ensembles de nombres rencontrés jusqu'à présent :



$\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; \ldots\}$ = ensemble des nombres ***naturels***, ceux qui servent à compter.

$\mathbb{Z} = \{\ldots ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; \ldots\}$ = ensemble des ***entiers***, ceux qui n'ont pas de partie décimale.

$\mathbb{Q} = \{\ldots ; ½ ; -3/5 ; -4 ; \ldots ; 0 ; 1,77…7… ; -12,45858…58… ; -2 ; \ldots\}$ = ensemble des nombres ***rationnels***, ceux qu'on peut transformer en fractions à termes entiers (*entiers, décimaux limités et illimités périodiques*).

Entoure la ou les bonnes réponses :

- Le nombre « 0 » est un nombre — naturel – entier – rationnel
- Le nombre « -7 » est un nombre — naturel – entier – rationnel
- Le nombre « 13 » est un nombre — naturel – entier – rationnel
- Le nombre « -0,72 » est un nombre — naturel – entier – rationnel
- Le nombre « $\frac{35}{6}$ » est un nombre — naturel – entier – rationnel

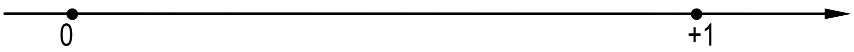
2. NOMBRES RATIONNELS ET DROITE GRADUEE

1] Sur la droite graduée ci-dessous, place les points **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G** tels que

$$\text{abs } A = +\frac{1}{7},\ \text{abs } B = +\frac{2}{7},\ \text{abs } C = +\frac{3}{7},\ \text{abs } D = +\frac{4}{7},\ \text{abs } E = +\frac{5}{7},\ \text{abs } F = +\frac{6}{7},\ \text{abs } G = +\frac{7}{7}$$

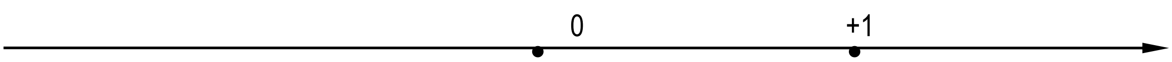
2] Sur la droite graduée ci-dessous, place les points **A**, **B, C, D et E** tels que

abs $\boldsymbol{A}$ = $-\frac{1}{2}$; abs $\boldsymbol{B}$ = $+\frac{2}{3}$ abs $\boldsymbol{C}$ = $-\frac{1}{6}$; abs $\boldsymbol{D}$ = $+\frac{3}{2}$; abs $\boldsymbol{E}$ = $+\frac{4}{3}$



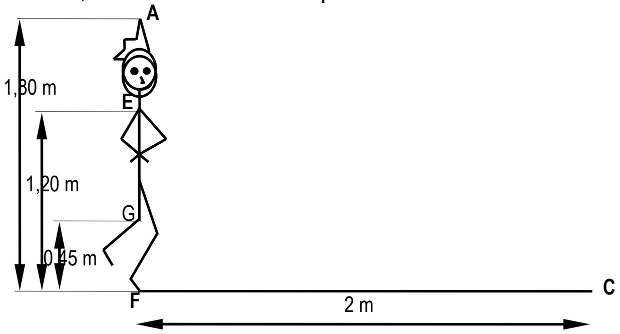
3] Sur la droite graduée ci-dessous, place les points **F**, **G** et **H** tels que

$\text{abs}\,F = +\frac{7}{5},\ \text{abs}\,G = -\frac{7}{5},\ \text{abs}\,H = -\frac{3}{5}.$



3. DIVISION DE SEGMENT

4] Au soleil couchant, le roi Frédo contemple son ombre sur le sol.

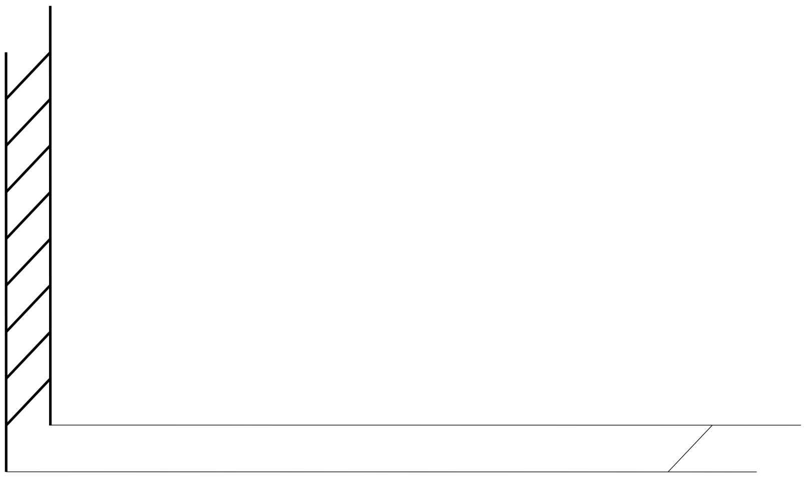


Sachant que **A** est le sommet de sa couronne et **C** l'ombre du point **A**, nomme **P** et **N** les ombres ***<u>respectives</u>*** de ses épaules (**E**) et de ses genoux (**G**) sur la droite **FC.**

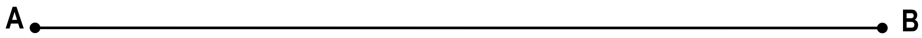
Sur la droite **FA**, si **0** est l'abscisse de **F** et **+1** est l'abscisse de **A**, alors
l'abscisse de **E** est .....
l'abscisse de **G** est .....

Sur la droite **FC**, si **0** est l'abscisse de **F** et **+1** est l'abscisse de **C**, alors
l'abscisse de **P** est .....
l'abscisse de **N** est .....

5] Dessine l'ombre des échelons de l'échelle ci-dessous.



6] Divise le segment **[AB]** en cinq segments isométriques (même mesure)



Exploration: Fractions – Décimaux et pourcentages

EXPLORATION : FRACTIONS – DECIMAUX ET POURCENTAGES

1. Ecrire chacune des fraction ci-dessous sous forme décimale puis sous forme de pourcentage.

Fractions	Ecriture décimale	Pourcentage	Fractions	Ecriture décimale	Pourcentage
$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{8}$		
$\frac{3}{2}$			$\frac{3}{8}$		
$\frac{1}{4}$			$\frac{5}{8}$		
$\frac{3}{4}$			$\frac{7}{8}$		
$\frac{1}{5}$			$\frac{1}{25}$		
$\frac{2}{5}$			$\frac{3}{25}$		
$\frac{3}{5}$			$\frac{4}{25}$		

2. Sur le carré dessiné ci-dessous et dont le côté mesure une unité, hachure les surfaces qui correspondent aux multiplications suivantes. Indique ensuite quelles fractions du carré sont couvertes par ces surfaces.

a) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7}$

b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{7}$

3. Calcule :

$40 . 4 =$	$40 . \frac{1}{4} =$	$\frac{1}{2} . \frac{1}{3} =$	$\frac{1}{5} . \frac{3}{2} =$
$40 . 2 =$	$40 . \frac{1}{2} =$	$\frac{1}{2} . \frac{2}{3} =$	$\frac{2}{5} . \frac{3}{2} =$
$40 . 1 =$	$40 . \frac{3}{4} =$	$\frac{1}{2} . 1 =$	$\frac{3}{5} . \frac{3}{2} =$
$40 . \frac{1}{2} =$	$40 . 1 =$	$\frac{1}{2} . \frac{4}{3} =$	$\frac{4}{5} . \frac{3}{2} =$
$40 . \frac{1}{4} =$	$40 . \frac{5}{4} =$	$\frac{1}{2} . \frac{5}{3} =$	$1 . \frac{3}{2} =$
$40 . \frac{1}{8} =$	$40 . \frac{3}{2} =$	$\frac{1}{2} . 2 =$	$\frac{6}{5} . \frac{3}{2} =$

4. Calcule :

$\frac{8}{3} : 8 =$	$\frac{4}{3} : 2 =$	$\frac{5}{3} : 2 =$
$\frac{8}{3} : 4 =$	$\frac{4}{3} : 4 =$	$\frac{5}{3} : 4 =$
$\frac{8}{3} : 2 =$	$\frac{4}{3} : 8 =$	$\frac{5}{3} : 8 =$
$\frac{8}{3} : 1 =$	$\frac{4}{3} : 16 =$	$\frac{5}{3} : 16 =$
$\frac{8}{3} : 0{,}5 =$	$\frac{4}{3} : 32 =$	$\frac{5}{3} : 32 =$

5. Calcule

$40 : 4 =$	$40 : \frac{1}{4} =$	$\frac{8}{3} : 4 =$	$8 : 100 =$
$40 : 2 =$	$40 : \frac{1}{2} =$	$\frac{8}{3} : 2 =$	$8 : 10 =$
$40 : 1 =$	$40 : \frac{3}{4} =$	$\frac{8}{3} : 1 =$	$8 : 1 =$
$40 : \frac{1}{2} =$	$40 : 1 =$	$\frac{8}{3} : \frac{1}{2} =$	$8 : 0{,}1 =$
$40 : \frac{1}{4} =$	$40 : \frac{5}{4} =$	$\frac{8}{3} : \frac{1}{4} =$	$8 : 0{,}01 =$
$40 : \frac{1}{8} =$	$40 : \frac{3}{2} =$	$\frac{8}{3} : \frac{1}{8} =$	$8 : 0{,}001 =$

Théorie page 8

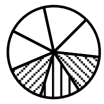
4. NOTIONS DE FRACTIONS

4.1. Différentes facettes des fractions

Les fractions sont utilisées dans divers contextes très différents. Elles ont donc plusieurs rôles :

4.1.1. Grandeurs fractionnées

$\frac{3}{7}$ d'un gâteau est l'expression mathématique d'une ***grandeur fractionnée*** : j'ai divisé ce gâteau en 7 parties égales et en ai pris 3 parts (partie hachurée).



Si on traduit cette expression en L.L., on obtient : « **trois septièmes** »

Analysons ces deux mots.

- « **septièmes** » est un substantif écrit avec **s** car c'est un pluriel. Ce nom se comporte comme un objet placé après le nombre naturel **3**. Le chiffre **7** n'exprime donc pas un nombre naturel mais une partie d'unité imaginaire (par exemple, le septième d'un gâteau).
- « **trois** » est le résultat du comptage du nombre de septièmes considérés.

Remarque :

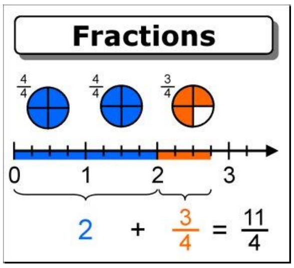
La langue française, pourtant très riche, utilise malheureusement le même mot pour exprimer deux notions très différentes. En effet, « septième » désigne aussi bien un niveau d'une succession (le 7e enfant d'une famille) qu'une portion d'unité (le septième du gâteau). C'est uniquement ce dernier cas que nous envisagerons.

4.1.2. Mesures

« Trois litres et demi » ; « trois heures quart » ; « 1m79 » expriment des ***mesures de grandeurs*** par rapport à une unité de référence choisie (litre – heure – mètre,…). Pour mesurer une grandeur, tu dois choisir une unité de mesure et observer combien de fois tu peux reporter cette unité dans la grandeur mesurée. Parfois, tu dois diviser cette unité en sous-unités (souvent dix parties de l'unité principale). Ainsi, « 1m79 » signifie 1mètre et 79 centièmes de mètre.

4.1.3. Nombres

Une fraction peut aussi permettre de repérer un point sur une droite graduée. Une famille de fractions équivalentes (voir découvertes) définit ***un même nombre rationnel***, positif ou négatif.



4.1.4. Rapports

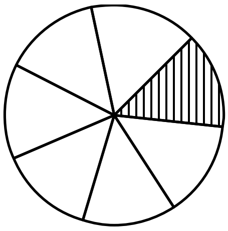
Les expressions suivantes traduisent un ***rapport***, une comparaison entre deux grandeurs ou entre deux mesures :

- « L'échelle de cette carte est un dix-millième » se note 1 :10000 ou 1/10000 et signifie que 1 cm sur la carte représente 10000 cm (10 km) dans la réalité ;
- « 75% des élèves ont bien réussi leur examen de mathématique » signifie que trois quart des élèves (75% = $\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$) de la classe ont bien réussi leur examen de mathématique.

4.2. Comparaison de fractions

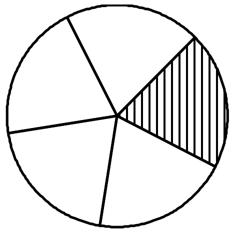
4.2.1. *Fractions de même numérateur*

Soient les fractions



$\frac{1}{7}$

Le septième de ce gâteau a été hachuré



$\frac{1}{5}$

Le cinquième de ce gâteau a été hachuré

On s'aperçoit que l'objet désigné par $\frac{1}{x}$ est

- d'autant plus grand par rapport à l'unité que x est ....
- d'autant plus petit par rapport à l'unité que x est ....

Application

Place < ou > à la place des ...

$$\frac{1}{7} \ldots \frac{1}{5}\ , \quad \frac{1}{2} \ldots \frac{1}{27}\ , \quad \frac{1}{19} \ldots \frac{1}{20} \quad \text{et} \quad \frac{1}{100} \ldots \frac{1}{10}$$

Conclusion

De deux fractions de **même numérateur**, celle qui exprime le plus petit nombre est celle qui a ....

4.2.2. *Fractions de même dénominateur*

Place < ou > à la place des ...

3 mètres ... 5 mètres

3 septièmes ... 5 septièmes

$$\frac{3}{7} \ldots \frac{5}{7}$$

Place < ou > à la place des ...

$$\frac{2}{9} \ldots \frac{5}{9}\ , \quad \frac{19}{9} \ldots \frac{15}{9}\ , \quad \frac{7}{19} \ldots \frac{23}{19} \quad \text{et} \quad \frac{45}{37} \ldots \frac{37}{37}$$

Conclusion

De deux fractions de **même dénominateur**, celle qui exprime le plus petit nombre est celle qui a ....

4.2.3. ***Autres fractions***

De ces deux résultats à des tests, $\frac{9}{10}$ et $\frac{13}{15}$*, lequel est le meilleur ?*

Pour répondre à cette question, il existe deux méthodes.

1ère méthode : **La réduction des fractions au même dénominateur**

Il s'agit d'exprimer ces deux fractions par deux fractions de même dénominateur (qui expriment le même nombre de « ièmes » d'unité).

→ Le plus simple est de choisir comme dénominateur commun, le P.P.C.M. des dénominateurs de chacune d'elles (voir en 2ème année).

2e méthode : Transformer ces fractions en écriture décimale ou pourcentage

On a $\frac{9}{10} = 0{,}9 = 90\%$ et $\frac{13}{15} = 0{,}866...6... = 86{,}66...6...\%$

Conclusion :

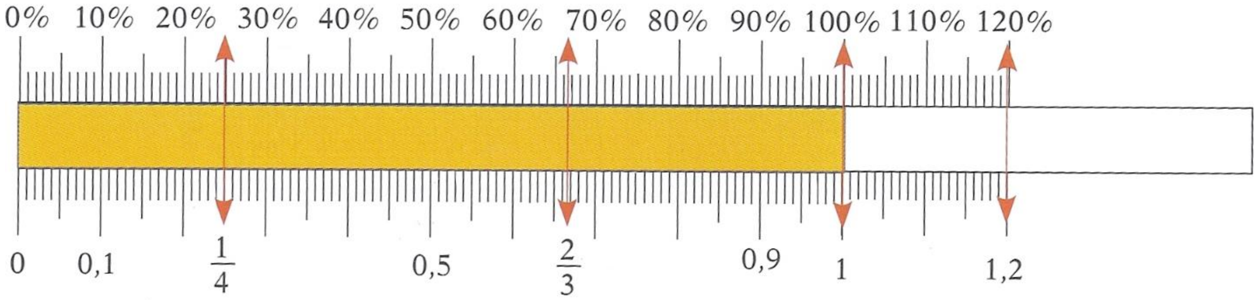
$$\frac{13}{15} < \frac{9}{10} \quad \text{car} \quad 0{,}866...6... < 0{,}9 \qquad \text{ou} \qquad 86{,}66...6...\% < 90\%$$

4.3. Rapport – Pourcentage et nombres décimaux[1]

Dans certains exercices (ou certaines découvertes), tu as pu constater que des rapports, des fractions pouvaient être transformées en pourcents pour être plus facilement comparables :

$$\frac{9}{10} = 0{,}9 = 90\% \text{ et } \frac{13}{15} = 0{,}866...6... = 86{,}66...6...\%$$

Il existe donc une correspondance entre ces trois « écritures » différentes d'une même réalité :



- prendre 25% d'une grandeur « ***x*** » équivaut à prendre le quart de cette grandeur ;
  à diviser ***x*** par 4 ;
  à multiplier ***x*** par 25 et diviser le résultat par 100.
- Prendre 125% d'une grandeur « ***y*** » équivaut à prendre les cinq quarts de cette grandeur ;
  à diviser ***y*** par 4 et multiplier le résultat par 5 ;
  à multiplier ***y*** par 125 et diviser le résultat par 100.

[1] Voir aussi Domaine III-IV page 3

Tu trouveras ci-dessous un tableau de correspondance reprenant les fractions les plus simples et utilisées :

Fractions	Ecriture décimale	Pourcentage	Fractions	Ecriture décimale	Pourcentage
$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{8}$		
$\frac{3}{2}$			$\frac{3}{8}$		
$\frac{1}{4}$			$\frac{5}{8}$		
$\frac{3}{4}$			$\frac{7}{8}$		
$\frac{1}{5}$			$\frac{1}{10}$		
$\frac{2}{5}$			$\frac{1}{25}$		
$\frac{3}{5}$			$\frac{3}{25}$		
$\frac{4}{5}$			$\frac{1}{125}$		

4.4. Règle de multiplication d'un entier et d'une fraction

Exemple :

Pour doubler la fraction $\frac{3}{8}$, tu dois effectuer le produit suivant :

$$2 \cdot \frac{3}{8} \qquad \left(\text{ou } \frac{3}{8} \cdot 2\right)$$

Pour ce faire, tu peux :

- Soit prendre 2 fois plus de part que pour $\frac{3}{8}$, ce qui donne :

$$2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{2.3}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

- Soit prendre le même nombre de parts mais deux fois plus grandes, c'est-à-dire des quarts à la place des huitièmes, ce qui donne :

$$2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$$

Pour multiplier une fraction et un nombre naturel non nul :
- **Soit tu multiplies son numérateur par ce naturel**
- **Soit tu divises son dénominateur par ce naturel (quand cette division n'a pas de reste)**

Dans les deux cas, la fraction doit ensuite être simplifiée si possible.

4.5. Règle de division d'une fraction par un naturel

Exemple :

Pour diviser par 3 la fraction $\frac{24}{7}$, tu dois effectuer le quotient suivant : $\frac{24}{7} : 3$

Pour ce faire, tu peux :

- Soit partager en 3 les 24 parts qui sont chacune des septièmes, ce qui donne :

$$\frac{24}{7} : 3 = \frac{8}{7}$$

- Soit en divisant chaque septième par 3 (« faire des morceaux 3 fois plus petits) et ainsi en faire des vingt-et-unièmes, ce qui donne :

$$\frac{24}{7} : 3 = \frac{24}{21} = \frac{8}{7}$$

> **Pour diviser une fraction par un nombre naturel non nul :**
> - **Soit tu divises son numérateur par ce naturel (quand cette division n'a pas de reste)**
> - **Soit tu multiplies son dénominateur par ce naturel.**
>
> **Dans les deux cas, la fraction doit ensuite être simplifiée si possible.**

4.6. Règle de division d'un naturel par une fraction de type $\frac{1}{n}$ $(n \neq 0)$

Analyse les suites de divisions suivantes :

40 : 4 = 10 40 : 2 = 20 40 : 1 = 40	*D'une ligne à l'autre, le diviseur est chaque fois divisé par deux et le quotient, lui par contre, est multiplié par deux.*

En prolongeant cette régularité, nous conviendrons que :

$40 : \frac{1}{2} = 80$

$40 : \frac{1}{4} = 160$

$40 : \frac{1}{8} = 320$

Tu constates ainsi que diviser 40 par $\frac{1}{2}$ revient à multiplier 40 par 2.

> **Pour diviser un nombre naturel par la fraction $\frac{1}{n}$, tu multiplies ce naturel par *n*.**

L'explication de ce résultat est donnée par la notion de base d'une division : diviser 40 par $\frac{1}{2}$ c'est se demander combien de fois $\frac{1}{2}$ est contenu dans 40. Puisque $\frac{1}{2}$ est contenu 2 fois dans chaque unité, il est contenu 40 . 2 = 80 fois dans 40 unités.

Par extension de cette règle,

8 : 100 = 0,08 8 : 10 = 0,8 8 : 1 = 8	*D'une ligne à l'autre, le diviseur est chaque fois divisé par dix et le quotient, lui par contre, est multiplié par dix.*

En prolongeant cette régularité, nous conviendrons que :

8 : 0,1 = 80

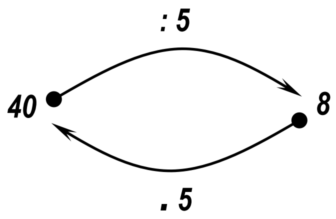
8 : 0,01 = 800

8 : 0,001 = 8000

Résultats tout à fait logique puisque tu peux remplacer 0,1 par la fraction $\frac{1}{10}$; 0,01 par la fraction $\frac{1}{100}$;…

<u>4.7. Règle de division par une fraction de type $\frac{k}{n}$ $(n \neq 0)$</u>

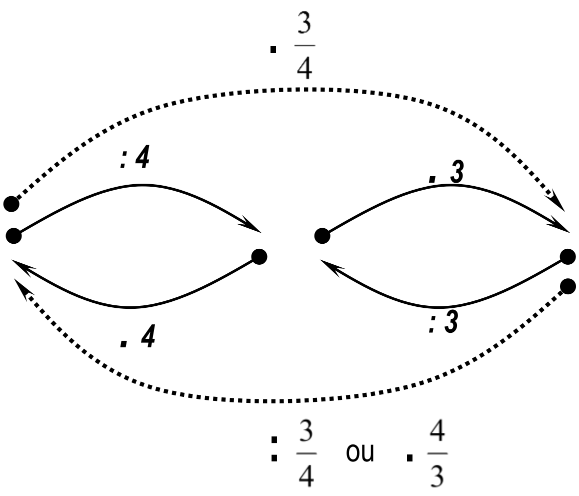
40 : 8 = 5 car 5 . 8 = 40



De même, pour passer d'un nombre à un autre, en divisant par $\frac{3}{4}$,

c'est faire le chemin inverse de la multiplication par $\frac{3}{4}$.

Or, tu sais que pour multiplier par $\frac{3}{4}$, tu dois diviser par 4 puis multiplier le résultat obtenu par 3 :



Faire le trajet inverse revient donc à diviser par 3 puis multiplier par 4 le résultat obtenu ; ce qui revient à multiplier par $\frac{4}{3}$, l'inverse de $\frac{3}{4}$.

Pour diviser un nombre par une fraction, tu multiplies ce nombre par l'inverse de cette fraction.