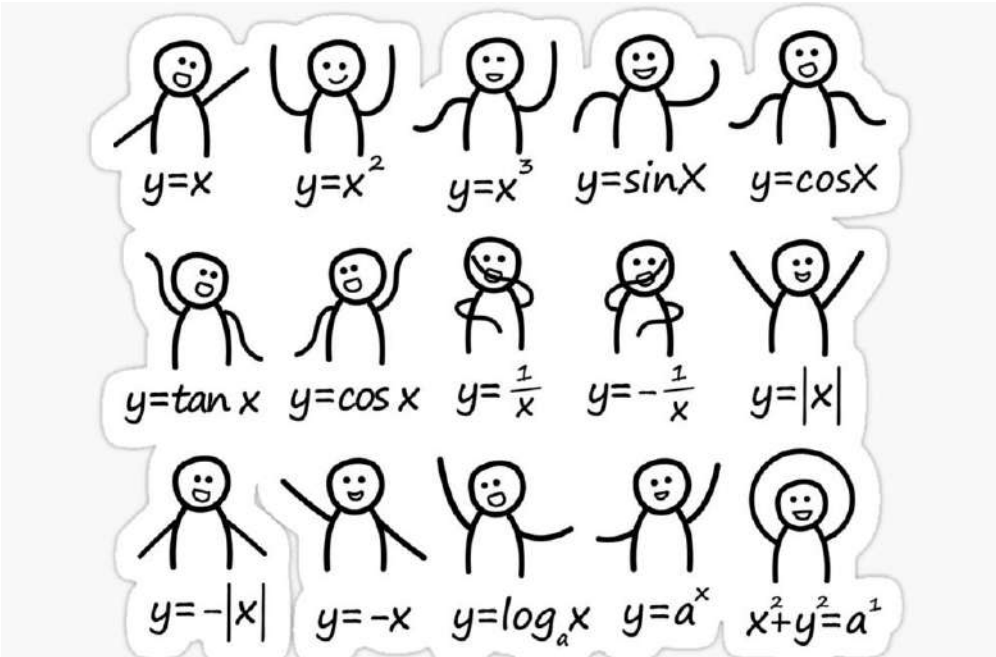
Collège Saint-Barthélemy
Y. Michiels

Mathématique – Quatrième année

FASCICULE 2

Notions de base et caractéristiques des fonctions
Fonctions de référence et transformées



OBJECTIFS – UAA4 : Fonction de référence

Connaitre

- Tracer le graphique d'une fonction de référence.
- Associer un type de fonction de référence à une situation donnée.
- Identifier la relation de réciprocité qui unit les fonctions x→x2 et x→√x, x→x3 et x→√x3.
- Interpréter graphiquement les définitions de croissance, décroissance, extrémum, parité.

Appliquer

- Apparier des graphiques de transformées de fonctions de référence et des expressions analytiques et justifier.
- Trouver l'expression analytique d'une transformée d'une fonction de référence à partir de son graphique.
- Tracer le graphique d'une transformée d'une fonction de référence.
- Résoudre algébriquement et graphiquement des équations du type $f(x)=k$ où f est une transformée d'une fonction de référence.

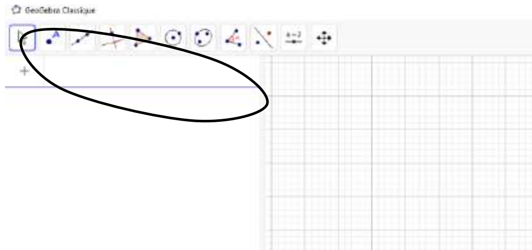
Transférer

- Modéliser une situation par une transformée d'une fonction de référence pour en tirer des informations.

EXPLORATION : Fonctions de référence et manipulations

Activité 1 : Représentation graphique des fonctions usuelles

Nous allons utiliser l'application géogébra pour construire le graphique des fonctions de référence, c'est-à-dire des fonctions étudiées pour leurs simplicités, leurs exemplarités ou afin de servir de support à l'étude d'une famille plus large de fonctions. Pour ce faire :



1) Ouvre l'application géogébra
2) Dans le champ de saisie, écris la fonction f(x) = x
3) Fais de même pour les autres fonctions :
   a) $g(x) = x^2$
   b) $h(x) = \sqrt{x}$
   c) $i(x) = x^3$
   d) $j(x) = \sqrt[3]{x}$
   e) $k(x) = \frac{1}{x}$
   f) $l(x) = |x|$
4) Complète ensuite les notes du cours de la page 31 à la page 35

Activité 2 : Géogébra → translation simples

1) Ouvre l'application géogébra
2) Dessine le graphique de $f(x) = x^2$ et colore-le en bleu.
3) Construis un curseur permettant de faire varier un paramètre k de -5 à 5.
4) Ecris une fonction $g(x) = (x + k)^2$. Fais varier la valeur de « k ». Qu'observez-vous ?

5) Ecris une fonction $h(x) = x^2 + k$. Fais varier la valeur de « k ». Qu'observez-vous ?

6) Ouvrez une nouvelle fenêtre et traitez la même question pour le graphique de $f(x) = \sqrt{x}$.
7) Ouvrez une nouvelle fenêtre et traitez la même question pour le graphe de $f(x) = x^3$.

Activité 3 : Géogébra → composées de translations

1) Dessine le graphique de $f(x) = x^2$ et colore-le en bleu.
2) Construis deux curseurs (un horizontal et un vertical) permettant de faire varier deux paramètres « a » et « b » de -5 à 5.
3) Propose et vérifie ensuite par GeoGebra une expression pour les fonctions dont le graphique est obtenu par translation du graphe de $f(x) = x^2$ et dont les sommets sont respectivement :

   a) (3 ; 5) →

   b) (-2 ; 4) →

   c) (1 ; -3) →

   d) (-4 ; -5) →

<u>Activité 4 :</u> **<u>Géogébra → dilatation et compression simples</u>**

1) Ouvre l'application géogébra
2) Introduit la fonction f(x) = *floor(x)* et colore-le en bleu. Le graphique a la forme d'un escalier vu de profil, c'est pourquoi on l'appelle fonction en escalier.
3) Construis un curseur permettant de faire varier un paramètre k de -5 à 5.
4) Ecris une fonction g(x) = *floor(k.x)*. Fais varier la valeur de « k ». Qu'observez-vous ?

5) Ecris une fonction h(x) = *floor(x).k* . Fais varier la valeur de « k ». Qu'observez-vous ?

6) Trouvez l'expression de la fonction :

- dont le graphique a des marches 2 fois plus hautes
- dont le graphique a des marches 3 fois plus profondes.

7) Ouvrez une nouvelle fenêtre et traitez la même question pour le graphique de f(x) = $\sqrt{x}$.
8) Ouvrez une nouvelle fenêtre et traitez la même question pour le graphe de f(x) = x^3.

<u>Activité 5 :</u> **<u>Géogébra → symétries axiales</u>**

1) Ouvre l'application géogébra
2) Dessine le graphique de f(x) = $\sqrt{x}$ et colore-le en bleu.
3) Propose l'expression d'une fonction symétrique de f(x) par symétrie axiale d'axe « x »

4) Propose l'expression d'une fonction symétrique de f(x) par symétrie axiale d'axe « y »

5) Ouvrez une nouvelle fenêtre et dessine graphique de f(x) = $x^3+2x^2 - x - 2$.
6) Dessine ensuite la fonction g(x) = |f(x)|. Que constates-tu ?

1. RAPPEL : LECTURE DE GRAPHIQUES

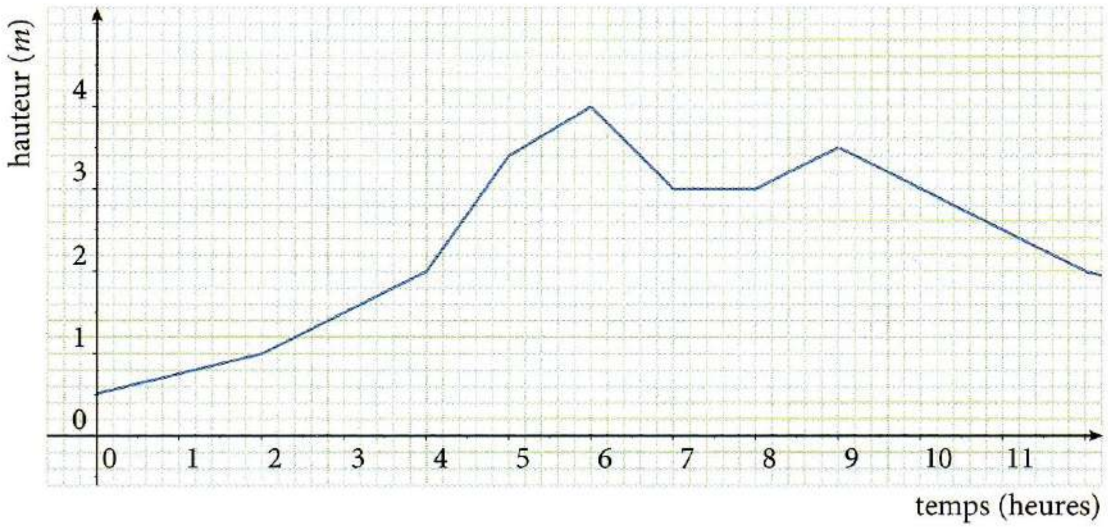
La notion de fonction est un concept fondamental que ce soit en mathématique, en physique, en économie, en sciences-sociales et dans beaucoup d'autres domaines.

La vie quotidienne regorge d'exemples où des grandeurs dépendent d'autres grandeurs :

- Le prix d'un billet de train en fonction de la distance à parcourir
- La taille d'un homme en fonction de son âge
- La quantité de précipitations d'eau de pluie en Belgique en fonction du mois de l'année

<u>Activité 1 : Une rivière en crue</u>

Voici un graphique indiquant la hauteur h, en mètres, d'un cours d'eau. La hauteur est donnée en fonction de l'heure t de la journée.



1) Complète le tableau suivant :

t	0	2	4		6	9	10		14
$h(t)$				3				2	

- Quelle est la variable indépendante ? ______________________________
- Quelle est la variable dépendante ? ______________________________

2) Quelle est la hauteur de l'eau à 9 heures ? ______________________________

3) Pour quelles heures disposons-nous d'une information sur la hauteur d'eau ? ____________

4) A quelle(s) heure(s) la hauteur relevée est-elle exactement de 2 mètres ? ____________

5) Que se passe-t-il entre 7 heures et 8 heures ? ______________________________

6) Quelle est la hauteur maximale atteinte par le cours d'eau ? A quelle heure ? ____________

7) A quels moments la hauteur de l'eau est-elle strictement croissante ? ____________

8) Quelle est l'image de 5 par la fonction h ? Que signifie ce résultat en langage courant ? ______

____

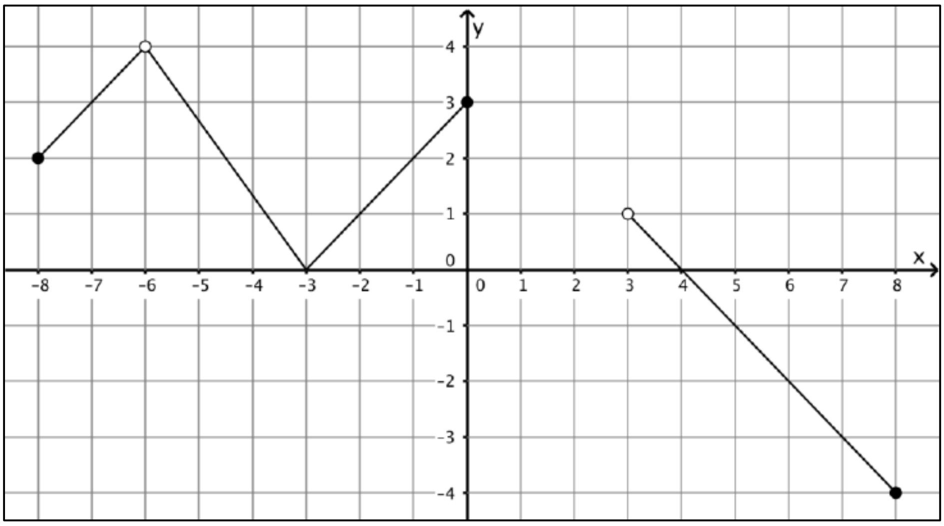
9) Quel est l'antécédent de 4 par la fonction h. Que signifie ce résultat en langage courant ? ____

____

10) A quels moments la hauteur de l'eau est-elle strictement supérieure à 3 mètres ? __________

Activité 2 : Hors contexte

Voici le graphique complet d'une fonction f :



1) Pour quelles valeurs de x la fonction f est-elle définie ?

____

2) Détermine les images de -3, de 3 et de 7 par f.

____

3) Détermine les antécédents de 2 par f.

____

4) Détermine tous les réels qui ont au moins un antécédent par f.

____

5) Quels sont les zéros de f ?

____

6) Détermine tous les réels dont l'image par f est strictement supérieure à 2.

____

7) Résous graphiquement l'inéquation $f(x) \leq -1$.

____

8) Quel est le sens de variation de f sur l'intervalle $[-3,0]$? Et sur l'intervalle $[4,7]$?

____

9) Quelles sont les éventuelles valeurs maximales et minimales de la fonction ?

____

Activité 3 : Domaine de définition de fonction

Tu trouveras ci-dessous les graphiques de 6 fonctions ainsi que les 6 expressions analytiques qui leur correspondent :

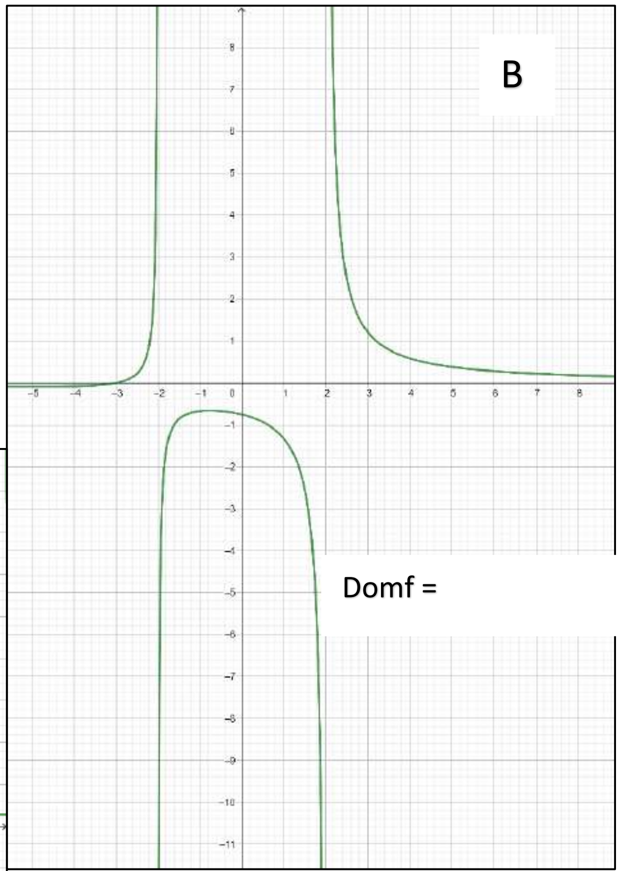
$f_1(x) = \sqrt{x-2}$

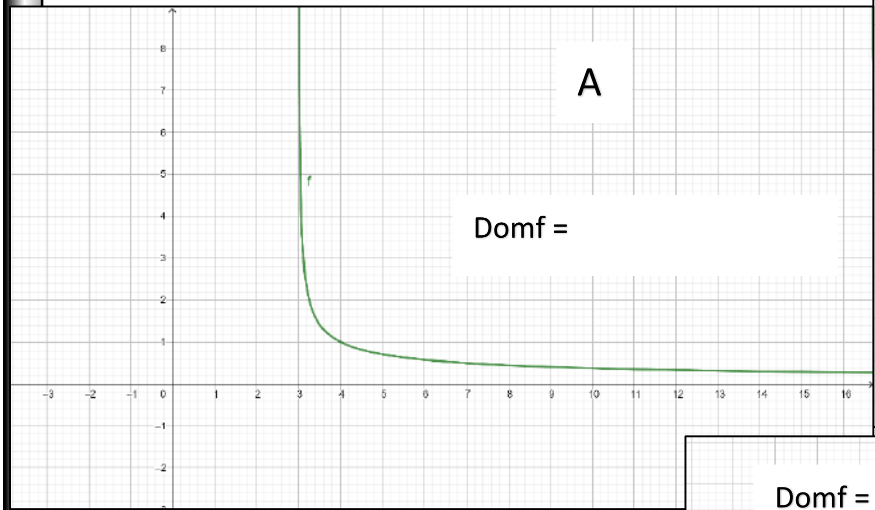
$f_2(x) = \dfrac{x+3}{x^2-4}$

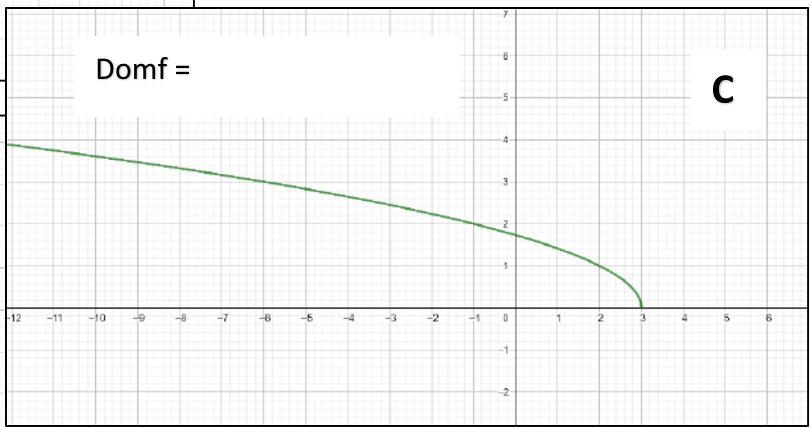
$f_3(x) = \frac{x+3}{x-2}$

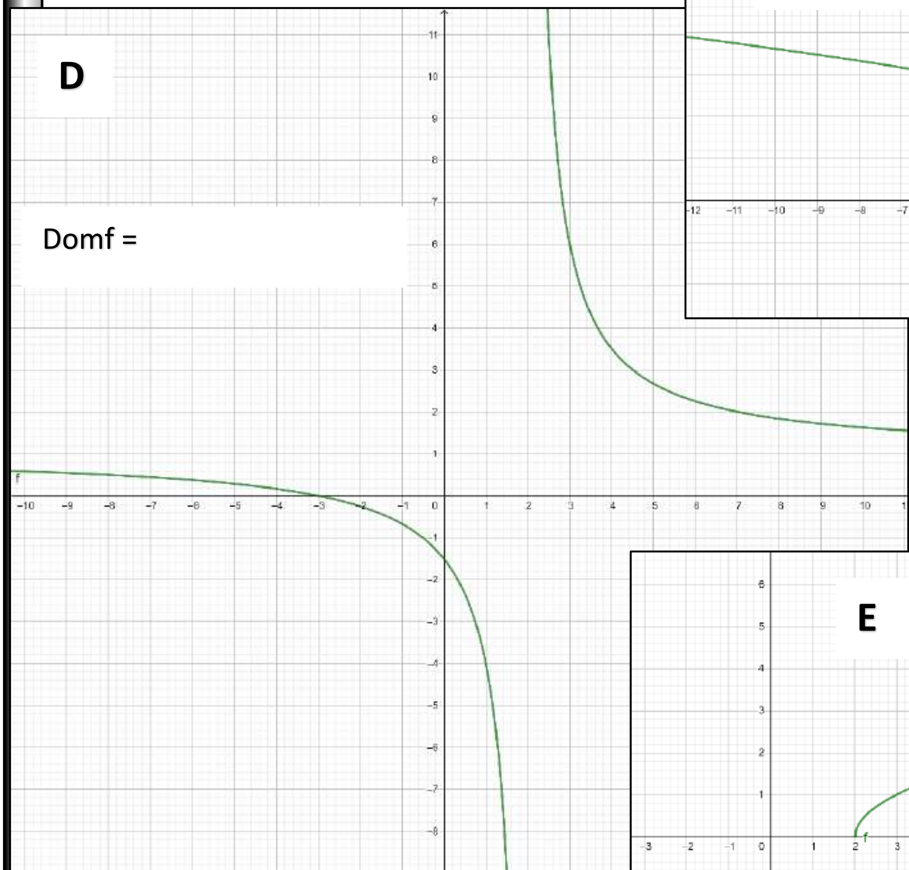
$f_4(\mathrm{x}) = \sqrt{-\mathrm{x}+3}$

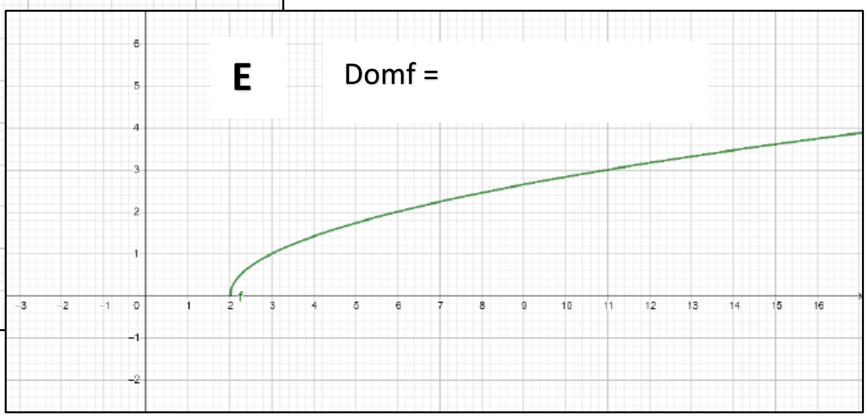
$f_5(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$









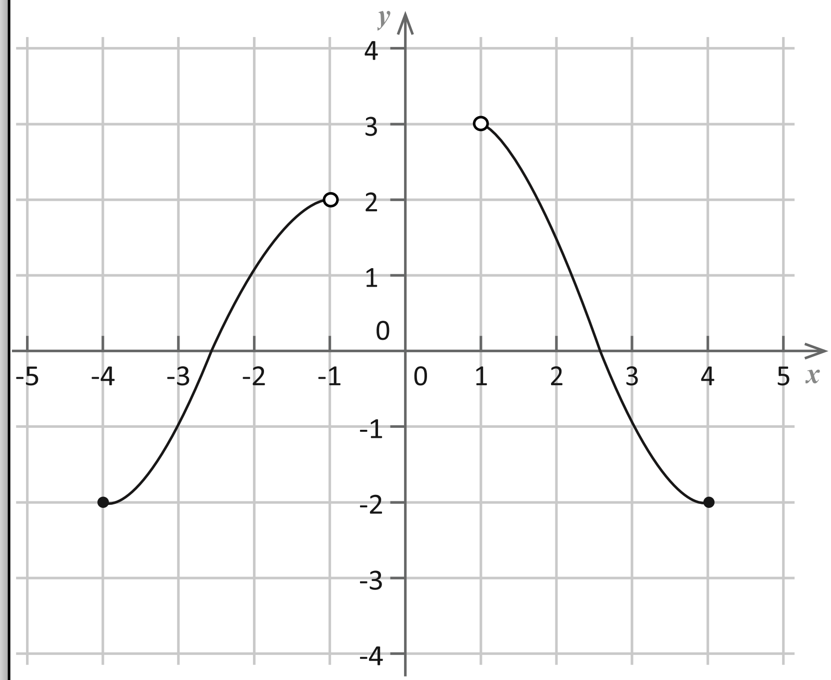


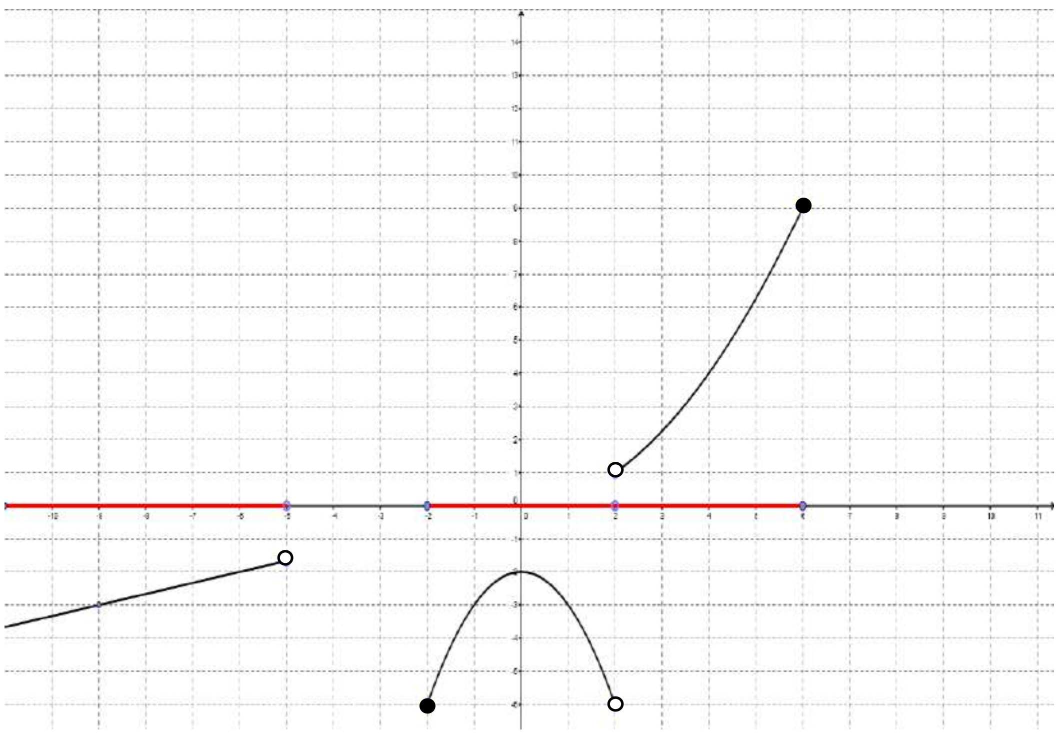
1) Ecris sous chaque graphique le domf.
2) Pour chaque expression analytique, essaie de poser les « conditions d'existence » de ces fonctions en réfléchissant à quelle(s) sont les valeur(s) de x qui n'auront pas d'image.
3) Associe chaque fonction à son graphique.

Activité 4 : Croissance – décroissance – extrémums – tableau de variation

Détermine pour chaque fonction :

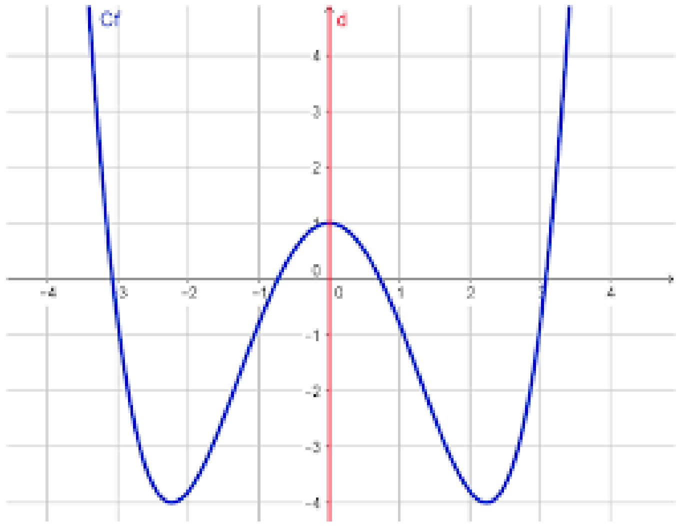
1) Domf et Imf
2) Les intervalles de croissance et de décroissance
3) Les minimum et maximum éventuels
4) Son tableau de variation





Activité 5 : Symétrie et parité d'une fonction

1) Fonction paire



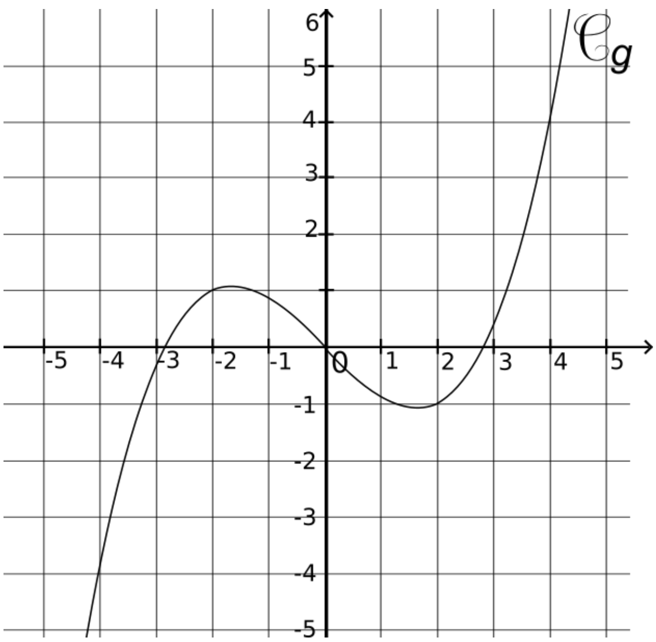
Complète :

f(0) =	f(0) =
f(1) =	f(-1) =
f(1,5) =	f(-1,5) =
f(2) =	f(-2) =
f(2,5) =	f(-2,5) =
f(3) =	f(-3) =
f(3,5) =	f(-3,5) =

Que constates-tu au niveau des images de deux nombres opposés ?

Qu'observes-tu au niveau du graphique de la fonction ?

2) Fonction impaire



Complète :

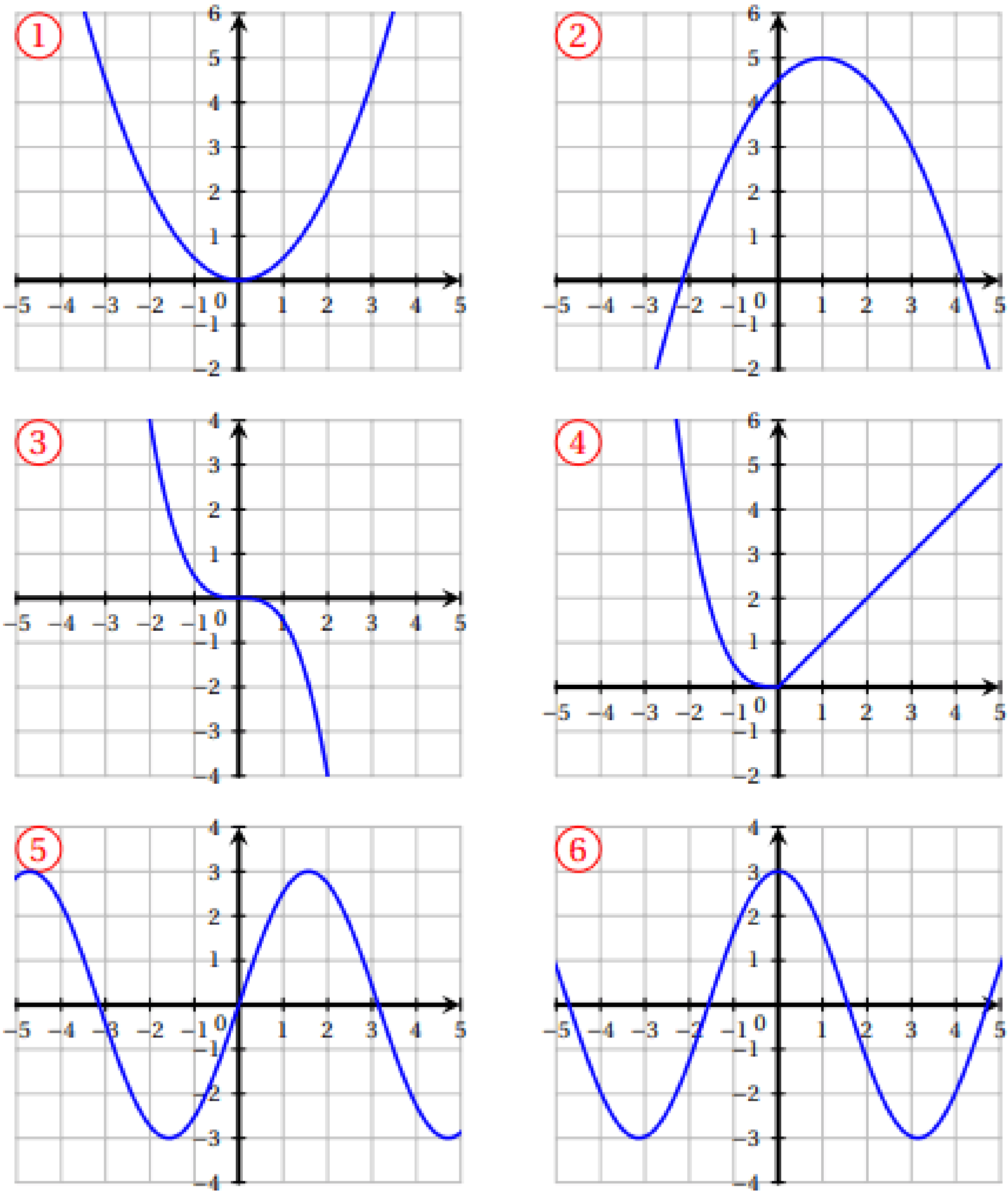
f(0) =	f(0) =
f(1) =	f(-1) =
f(1,5) =	f(-1,5) =
f(2) =	f(-2) =
f(2,5) =	f(-2,5) =
f(3) =	f(-3) =
f(3,5) =	f(-3,5) =
f(4) =	f(-4) =

Que constates-tu au niveau des images de deux nombres opposés ?

Qu'observes-tu au niveau du graphique de la fonction ?

3) <u>Exercices</u>

À partir du graphique des fonctions ci-dessous, détermine leur parité (*paire*, *impaire* ou *ni paire, ni impair* Détermine la parité des fonctions suivantes.



Détermine par calcul la parité des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3x^2 - 4$

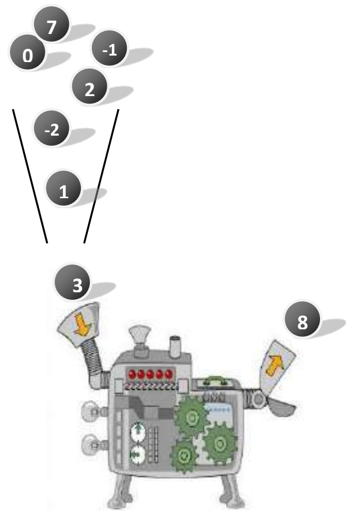
b) $f(x) = 2x^3 - 4x$

c) $f(x) = \sqrt{x - 7}$

d) $f(x) = -2x^3 + 7x^2 - 3$

2. CARACTERISTIQUES D'UNE FONCTION

En troisième année, les différents éléments caractéristiques d'une fonction ont été abordés sous l'aspect graphique (dans un repère cartésien). Cette année, certaines de ces notions vont être mise envisagées sous l'aspect algébrique (nécessitant un calcul). Des liens pourront ainsi être établis.

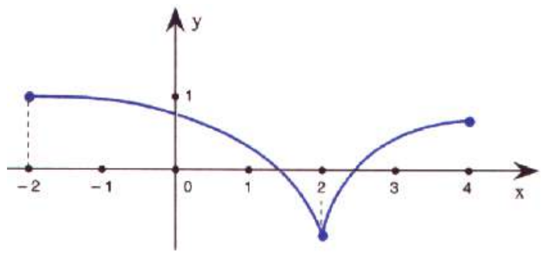


2.1. Définition d'une fonction à variable réelle

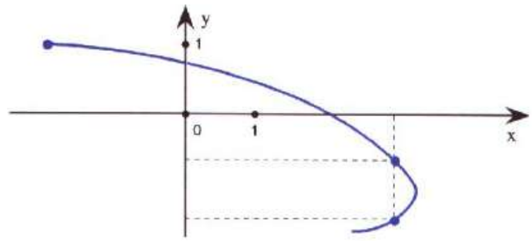
Pour se représenter simplement la notion de « fonction », on la compare souvent à une « machine à transformer les nombres » ; puisqu'en mathématique, on travaille la plupart du temps avec des nombres.
Si on place successivement des nombres dans une machine (voir schéma), d'autres en sorte, calculés en fonction des premiers (voir pg Fct3-4), suivant une règle. Pour que cette "machine" soit appelée fonction, il faut que pour chaque nombre qui entre dans la "machine", il ne sorte pas plus d'une image.

Une fonction à variable réelle est une relation qui, à tout réel « x », fait correspondre au plus un réel « y ».

Exemple :



Graphique d'une fonction



Graphique d'une relation non fonctionnelle

2.2. Notations

L'écriture générale simplifiée d'une fonction est :

$\boldsymbol{y = f(x)}$ **où**

- x est la ***variable réelle indépendante*** qu'on appelle aussi ***antécédent***
- y est l'***image*** de x par la fonction f

$f(x)$ est l'***expression analytique*** de cette fonction, c'est-à-dire l'expression qui indique la manière de calculer l'image de x.

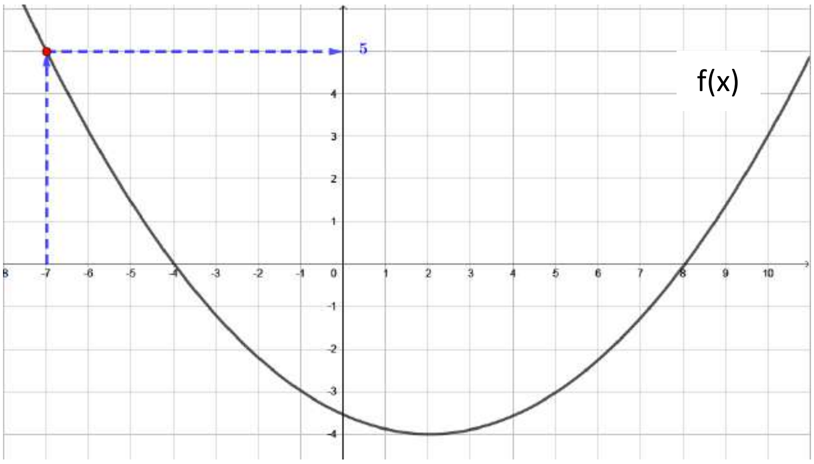
Exemple : Soit $f(x) = x^2 + 3$ $\rightarrow$ l'image d'un nombre se calcule en l'élevant au carré puis en lui ajoutant 3.

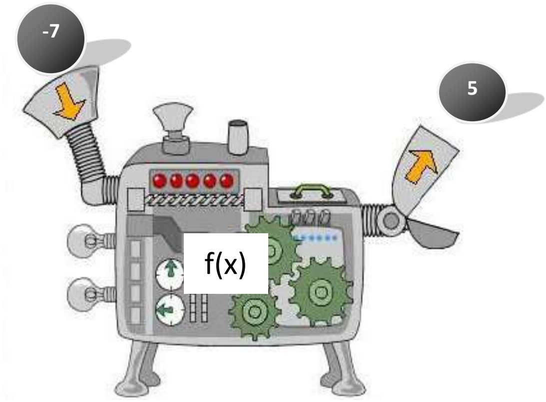
2.3. Image de…

$\boxed{\textit{Approche graphique}}$:

Dans l'exemple ci-dessous, ***l'image de -7 par la fonction f(x) est 5.***

En L.M. : ***f(-7) = 5***

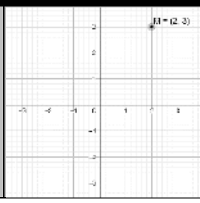




Quelle est l'image de 2 ?

Que vaut f(-4) ?

Voici quatre transcriptions de la notion « d'image de… » à travers une fonction :

Langage symbolique formel	Langage littéraire	Tableau de valeurs	Langage graphique	
f(2) = 3	L'image de 2 par la fonction **f** est 3 ou 2 a pour image 3 par la fonction **f**.	***x*** | ***f(x)*** 2 | 3		Le point M de coordonnées (2 ; 3) appartient au graphe de la fonction f(x)

$\boxed{\textit{Approche algébrique}}$:

Soit la fonction : f(x) = x^2 - 4

Pour calculer l'image de 3 par cette fonction (f(3)), il suffit de remplacer x par 3 et calculer :

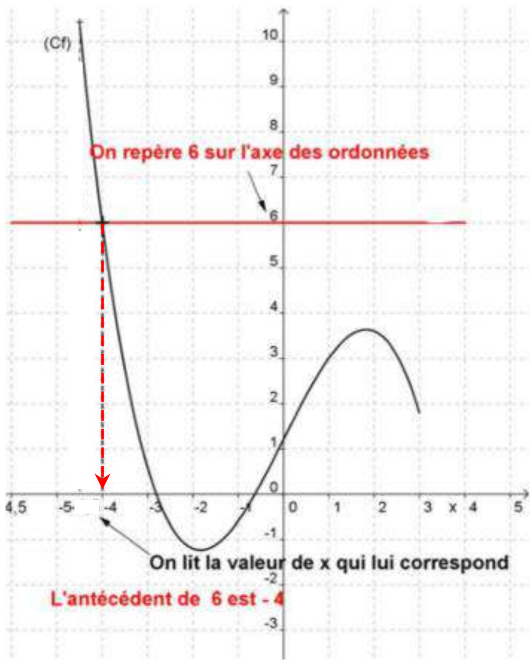
f(3) = 3^2 - 4 = 5

2.4. Antécédent(s) de…

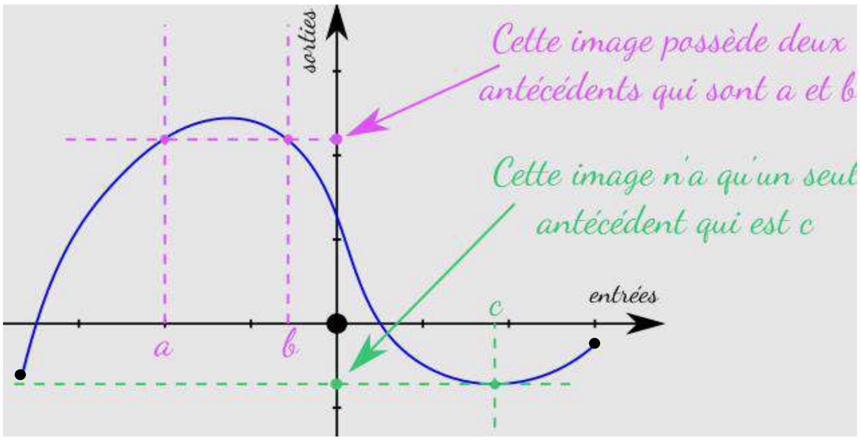
$\boxed{\textit{Approche graphique}}$:

Dans l'exemple ci-dessous, l'antécédent de 6 par la fonction f(x) est -4.

En L.M. : f(x) = 6 si x = -4



Pour une valeur y en sortie, il peut exister une ou plusieurs valeurs x en entrée qui ont y pour image. On dit que chacune de ces valeurs est un antécédent de y par la fonction f.



Approche algébrique :

Soit la fonction : f(x) = x^2 - 4

Pour calculer le ou les antécédent(s) de 5 par cette fonction (L.M. : f(x) = 5), il suffit de remplacer f(x) par 5 et résoudre l'équation obtenue :

f (x) = x^2 - 4 = 5 $\Leftrightarrow x^2 - 9 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 3)(x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$

Conclusion : 5 a deux antécédents : 3 et -3

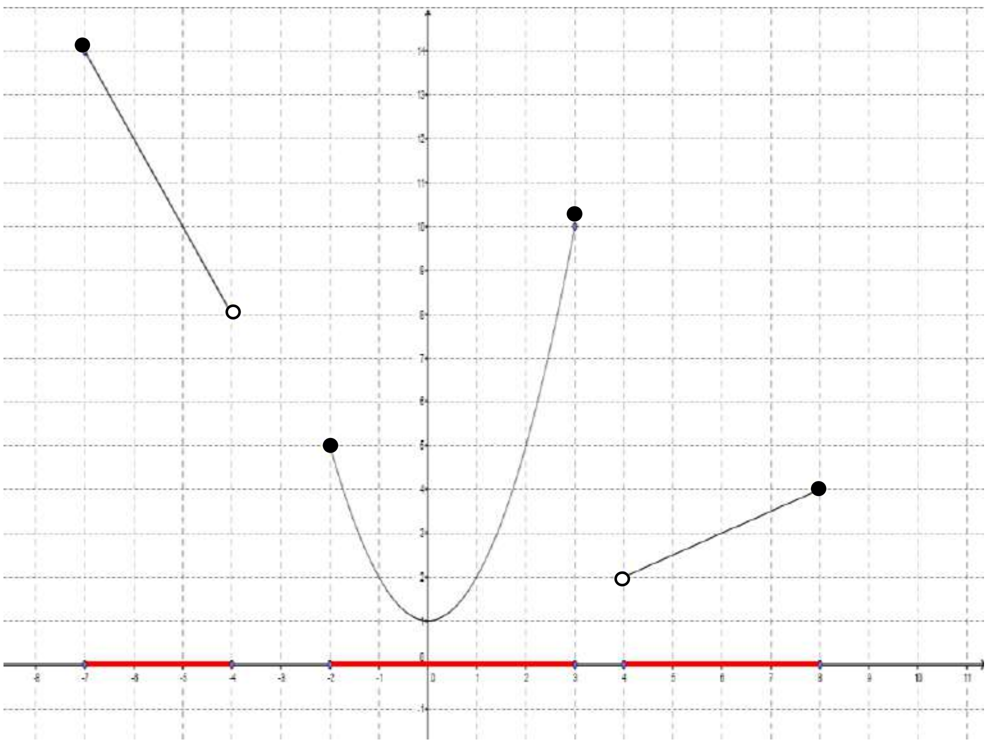
2.5. Domaine de définition d'une fonction

L.L. : Le domaine de définition d'une fonction f(x) regroupe l'ensemble des valeurs « x » qui ont une image par cette fonction f(x).

L.M. : $\boldsymbol{dom\ f} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} : \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}\})$

C'est donc l'ensemble des antécédents de cette fonction. Il est noté : ***dom f***

Approche graphique :



Pour lire le domaine d'une fonction f, il faut parcourir l'axe Ox de gauche à droite. Tous les réels possédant une image par la fonction f constituent le domaine de cette fonction.

Exemple :

Pour la fonction représentée ci-dessus, le domaine s'écrit : ***Dom f* = [-7 ; -4[∪ [-2 ; 3] ∪]4 ; 8]**

Approche algébrique :

- Prenons par exemple la fonction : f(x) = x^2

N'importe quel nombre réel peut être élevé au carré. Le domaine de définition de cette fonction est donc l'ensemble de tous les réels. On note : domf = $\mathbb{R}$

- Prenons enfin un deuxième exemple, la fonction ; f(x) = $\frac{1}{x-2}$

La fonction est ici une fraction rationnelle pour laquelle une **C**ondition d'**E**xistence doit être posée. En effet, on ne peut diviser par 0.

C.E. : $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \rightarrow$ le domaine s'écrit donc : domf = $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ (tous les réels sauf 2.

- Prenons maintenant en considération la fonction : f(x) = $\sqrt{x}$

Nous avons vu en troisième année que le radicant (x) doit être un nombre positif. Autrement dit, les nombres négatifs n'ont pas d'image par cette fonction. Le domaine de définition de cette fonction est donc l'ensemble de tous les réels **positifs**. On note : domf = $\mathbb{R}^+$ ou $[0 ; +\infty[$

Nous retiendrons donc, à ce stade que deux conditions d'existence doivent être posées si :

1) La fonction comporte un dénominateur qui est un polynôme (fonction fraction rationnelle)
2) La fonction comporte une racine carrée (fonction irrationnelle)

1) Si $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \rightarrow$ C.E. : Q(x) ≠ 0 (équation à résoudre)

2) Si f(x) = $\sqrt{P(x)} \rightarrow$ C.E. : P(x) ≥ 0 (inéquation à résoudre)

Exemple : Détermine le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 4x^2 - 2x + 1$

2) $f(x) = \frac{4x-5}{x^2-4}$

3) $f(x) = \sqrt{3x+5}$

4) $f(x) = \frac{x^2-9}{\sqrt{2-5x}}$

5) $f(x) = \frac{\sqrt{-x-2}}{\sqrt{x+3}}$

6) $f(x) = \frac{\sqrt{-x-5}}{x^2-4}$

Finalement, cette recherche algébrique de domaine de définition d'une fonction peut se résumer à 6 cas différents, même s'il n'y a que 2 conditions à 'retenir'

Cas 1 : f(x) = $\boldsymbol{\frac{P(x)}{Q(x)}}$	Il faut résoudre l'équation Q(x) $\neq$ 0. Elle pourra être soit du premier degré, soit d'un degré supérieur à un.
Cas 2 : f(x) =$\boldsymbol{\sqrt{P(x)}}$	Il faut résoudre l'inéquation P(x) $\geq$ 0. Ce qui peut être plus ou moins difficile. • Si P(x) est un polynôme du premier degré, la résolution est « simple » • Si P(x) est un polynôme d'un degré supérieur à un, un tableau de signe est nécessaire
Cas 3 : f(x) = $\boldsymbol{\frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}}$	Il faut combiner les deux conditions : • $\left.\begin{array}{l} Q(x)\neq 0 \\ Q(x) \geq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow Q(x) > 0$ $\rightarrow$ il faut résoudre cette inéquation (voir cas 2)
Cas 4 : f(x) = $\boldsymbol{\frac{\sqrt{P(x)}}{Q(x)}}$	Les deux conditions doivent être traitées séparément : • P(x) $\geq$ 0 (inéquation $\rightarrow$ cas 2) • Q(x) $\neq$ 0 (équation $\rightarrow$ cas1)
Cas 5 : f(x) = $\boldsymbol{\frac{\sqrt{P(x)}}{\sqrt{Q(x)}}}$	Il y a **<u>deux conditions indépendantes</u>** (2 racines $\rightarrow$ 2 inéquations) : • P(x) $\geq$ 0 (inéquation $\rightarrow$ cas 2) • $Q(x) > 0$ (cas 3)
Cas 6 : f(x) $\boldsymbol{\sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}}$	Ce cas est souvent confondu avec le précédent. Il n'y a qu'**<u>une racine</u>**, donc une **<u>seule condition</u>** : • $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ Il faut établir **UN SEUL** tableau de signe reprenant P(x) et Q(x).

2.6. Ensemble image d'une fonction

L.L. : L'ensemble image d'une fonction f est l'ensemble de toutes les valeurs y qui sont images d'au moins une valeur x par cette fonction

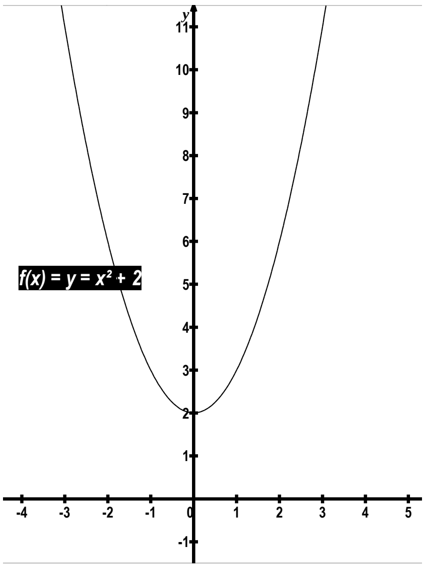
L.M. : $\boldsymbol{Im\ f = \{f(x) : x \in domf\})}$

C'est donc l'ensemble des images de cette fonction. Il est noté : ***Im f***

Approche graphique :

Pour lire l'ensemble image d'une fonction f, il faut parcourir l'axe Oy de bas en haut. Tous les réels étant l'image d'un ou de plusieurs réels constituent l'ensemble image de cette fonction.

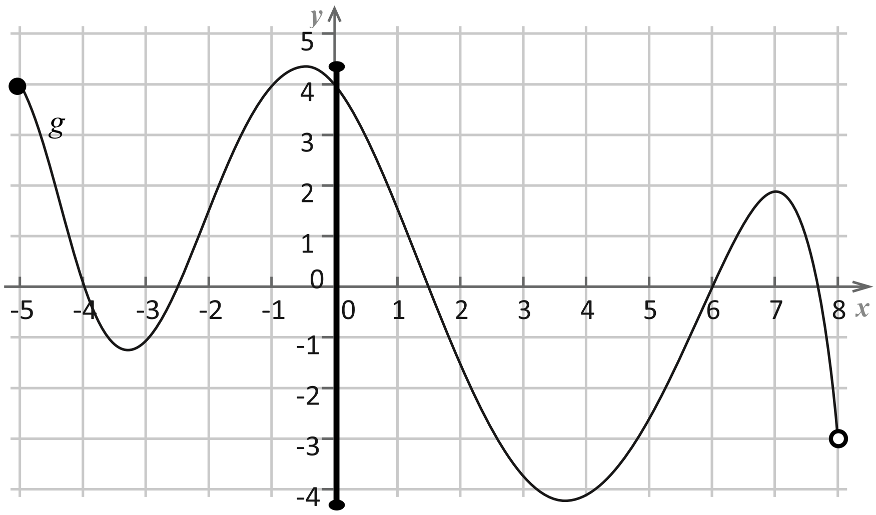
Exemple 1 :



Pour la fonction envisagée dans l'exemple 1, l'ensemble image est [2 ; +∞]. On notera :

Im f = [2 ; +∞]

Exemple 2 :



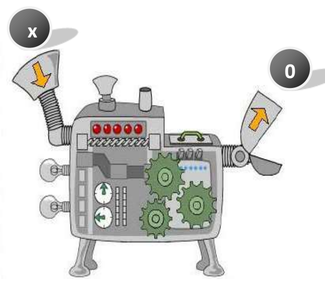
Pour la fonction envisagée dans l'exemple ci-contre, l'ensemble image est :

Im f = [-4,2 ; 4,2]

Approche algébrique :

A ce stade, nous n'essayerons pas de calculer Imf.

2.7. Racine (ou zéro) d'une fonction



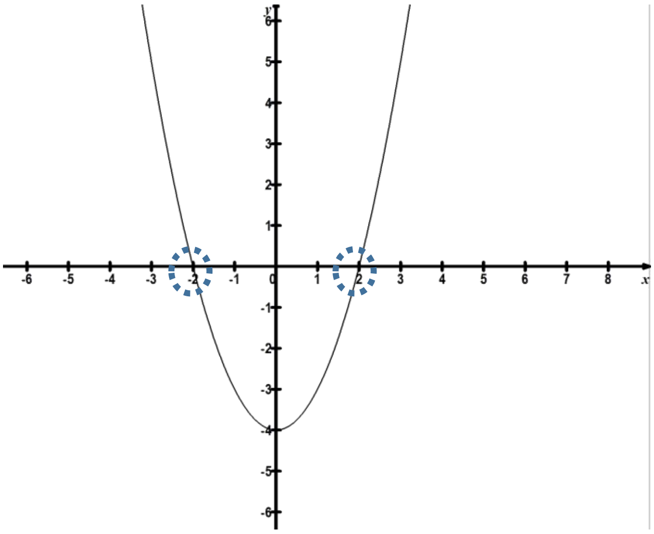
L'abscisse d'un point d'intersection entre **l'axe des x et le graphique** de la fonction est appelé **racine** de la fonction.

L.L. : Le(s) racines d'une fonction y = f(x), ce sont le(s) valeurs de x dont l'image à travers la fonction est égale à zéro.

L.M. : Le réel a est un zéro de f ssi $\boldsymbol{a \in dom\, f}$ et $\boldsymbol{f(a) = 0}$

Approche graphique :

Les zéros d'une fonction sont les abscisses des points d'intersection du graphique de la fonction avec l'axe des abscisses.
La fonction représentée ci-contre possède deux racines : x = -2 et x = 2.



Approche algébrique :

Pour calculer les racines d'une fonction, il faut rechercher les valeurs de x qui annulent cette fonction c'est-à-dire qu'il faut résoudre l'équation $f(x) = 0$.

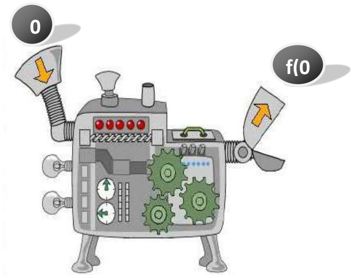
Exemple :

Soit la fonction **f(x) = x² - 4**

f(x) = 0 ⇔ $x^2 - 4 = 0$

⇔ $(x - 2)(x + 2) = 0$

⇔ x = 2 ou x = -2 → ce sont les deux racines de f(x)



2.8. Ordonnée à l'origine

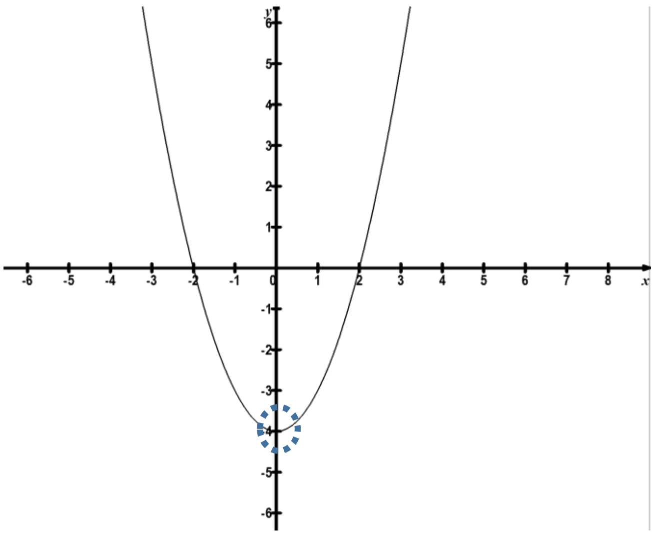
L'ordonnée du point d'intersection entre **l'axe des y et le graphique** de la fonction est appelé **ordonnée à l'origine** de la fonction.

L.L. : L'ordonnée à l'origine d'une fonction est l'image de « 0 » par cette fonction pour autant que la fonction soit définie en 0 (il faut que 0 ait une image).

L .M. : Le réel a est l'ordonnée à l'origine de f ssi $\boldsymbol{0 \in dom\, f}$ et $\boldsymbol{f(0) = a}$

Approche graphique :

L'ordonnée à l'origine d'une fonction est l'ordonnée du point d'intersection du graphique de la fonction avec l'axe des ordonnées.



Approche algébrique :

Pour calculer l'ordonnée à l'origine d'une fonction, il faut calculer l'image de 0 par cette fonction, c'est-à-dire, calculer $f(0)$.

Soit la fonction **f(x) = x² - 4**

f(0) = -4 → l'ordonnée à l'origine de f(x) vaut -4.

Exemple : Détermine le domaine de définition, les éventuelles racines et l'ordonnée à l'origine de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x^2 - 9$

Recherche du $dom\ f$:

Recherche des racines de f(x) :

Recherche de l'ordonnée à l'origine de f(x) :

2) $f(x) = \frac{8}{2x-1}$

Recherche du $dom\ f$:

Recherche des racines de f(x) :

Recherche de l'ordonnée à l'origine de f(x) :

3) $f(x) = \sqrt{2x-6}$

Recherche du $dom\ f$:

Recherche des racines de f(x) :

Recherche de l'ordonnée à l'origine de f(x) :

4) $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{5x+7}}$

Recherche du $dom\ f$:

Recherche des racines de f(x) :

Recherche de l'ordonnée à l'origine de f(x) :

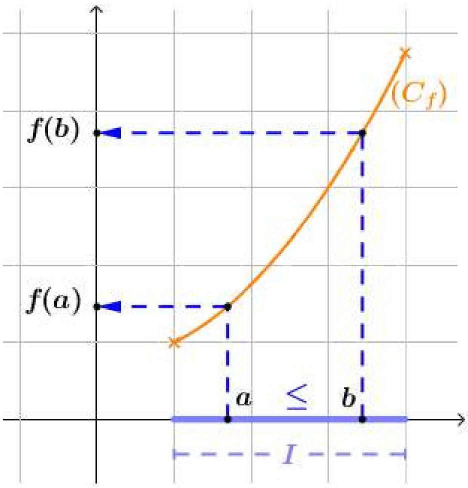
2.9. Variations d'une fonction

2.9.1. *Fonction croissante*

Quand tu parcours le « tracé » d'une fonction de gauche à droite (pour des valeurs de « x » croissantes), la courbe « monte » ou « descend ». On dit que la fonction est **croissante** ou **décroissante**.

L.L. : une fonction f est **croissante** sur un intervalle *I* de son domaine si et seulement si quels que soient les réels x_1 et x_2 distincts, si x_1 est inférieur à x_2, l'image de x_1 est inférieure à l'image de x_2
L .M. : Une fonction f est **croissante** sur un intervalle I de son domaine si et seulement si $\forall\, \boldsymbol{x_1, x_2 \in I :\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)}$

Approche graphique :



Dire que f est croissante sur un intervalle I revient à dire que pour tout x appartenant à I, x et $f(x)$ varient dans le même sens :

si x augmente, $f(x)$ augmente

et

si x diminue, $f(x)$ diminue.

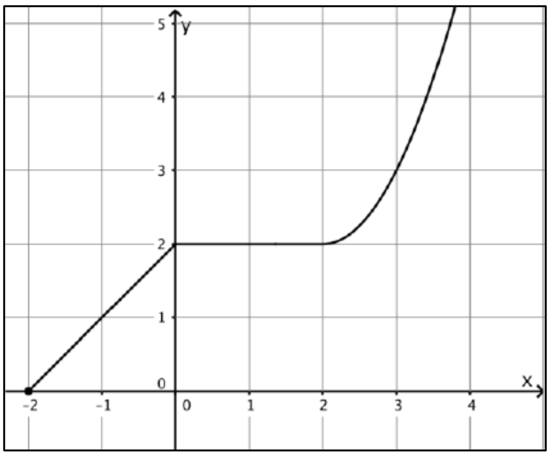
Approche algébrique :

En cinquième année, tu apprendras à déterminer par calcul sur quels intervalles une fonction est ***croissante***, ***décroissante*** ou ***constante***.

Remarque :

Une fonction f est **STRICTEMENT croissante** sur un intervalle I de son domaine si et seulement si $\forall\, x_1, x_2 \in I :\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$

Exemple : Fonction croissante ou strictement croissante ?



Cette fonction est croissante sur :

Par contre, elle est ***strictement*** croissante sur :

2.9.2. *Fonction croissante*

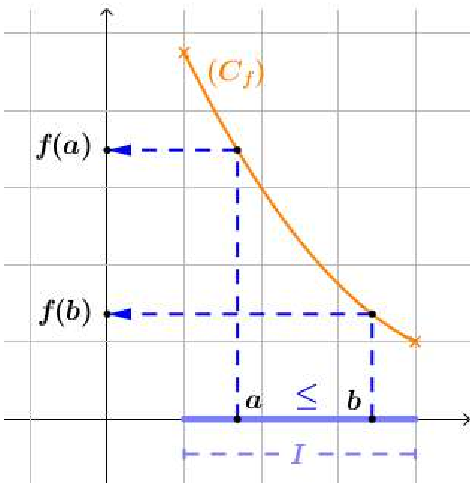
L.L. : une fonction f est **décroissante** sur un intervalle I de son domaine si et seulement si quels que soient les réels $\boldsymbol{x_1}$ et $\boldsymbol{x_2}$ distincts, si $\boldsymbol{x_1}$ est inférieur à $\boldsymbol{x_2}$, l'image de $\boldsymbol{x_1}$ est supérieure à l'image de $\boldsymbol{x_2}$

L .M. : Une fonction f est **décroissante** sur un intervalle I de son domaine

si et seulement si

$$\forall\, \boldsymbol{x_1, x_2 \in I} : \boldsymbol{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)}$$

Approche graphique :



Dire que f est décroissante sur un intervalle I revient à dire que pour tout x appartenant à I, x et $f(x)$ varient en sens contraire :

si x augmente, $f(x)$ diminue

et

si x diminue, $f(x)$ augmente.

Approche algébrique :

En cinquième année, tu apprendras à déterminer par calcul sur quels intervalles une fonction est ***croissante***, ***décroissante*** ou ***constante***.

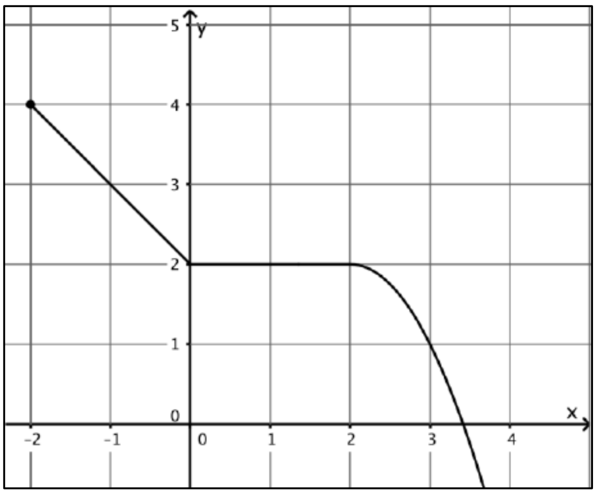
Remarque :

Une fonction f est **STRICTEMENT décroissante** sur un intervalle I de son domaine

si et seulement si

$$\forall\, x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Exemple : Fonction décroissante ou strictement décroissante ?



Cette fonction est croissante sur :

Par contre, elle est ***strictement*** croissante sur :

2.9.3. Maximum et minimum d'une fonction

Souvent, on s'intéresse à la plus grande valeur ou à la plus petite valeur (problème d'optimisation).

Soit I un intervalle inclus dans le domaine de définition de la fonction f.

Maximum local

> L.L. : La valeur f(a) d'une fonction s'appelle le maximum de la fonction sur l'intervalle **I** lorsque f(a) ≥ f(x) pour toutes les valeurs de x de cet intervalle.
>
> L.M. : Une fonction f admet un **maximum local** en $a \in I$, si
>
> $$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I} : \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \geq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).$$

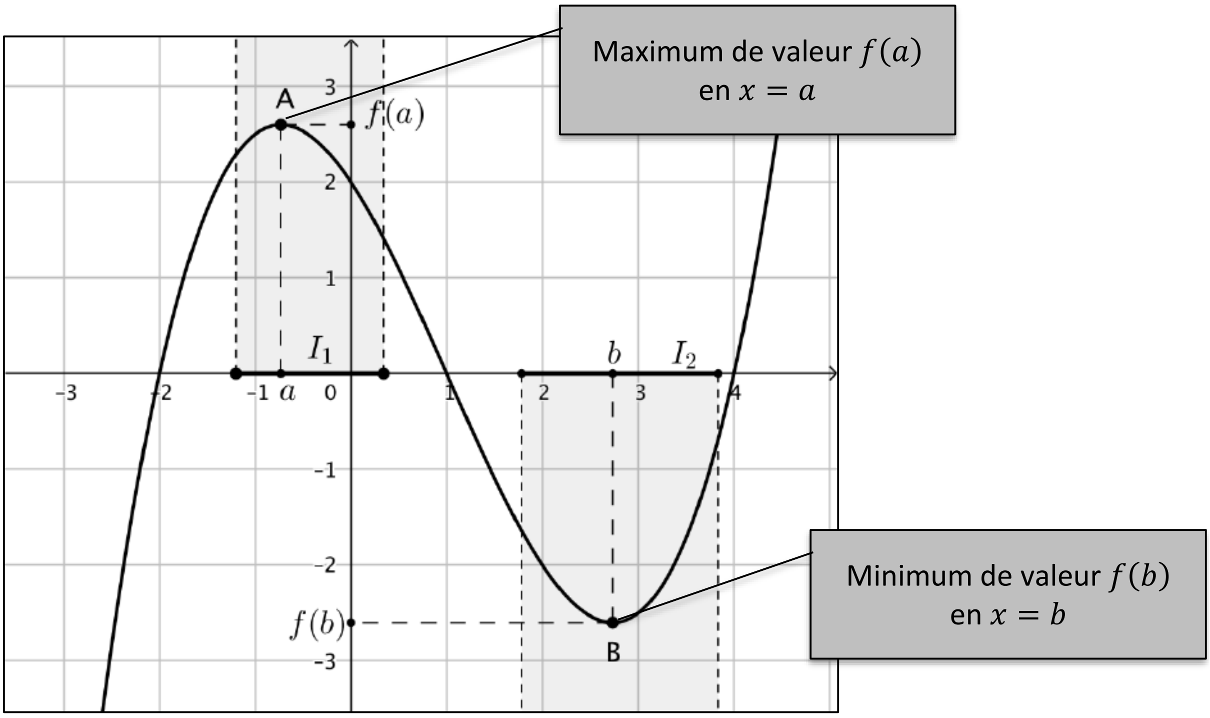
La valeur du maximum est $f(a)$.

Minimum local

> L.L. : La valeur f(a) d'une fonction s'appelle le minimum de la fonction sur l'intervalle **I** lorsque f(a) ≤ f(x) pour toutes les valeurs de x de cet intervalle.
>
> L.M. : Une fonction f admet un **maximum local** en $a \in I$, si
>
> $$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I} : \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).$$

La valeur du minimum est $f(a)$.

Approche graphique :



NB : Si l'inégalité est vraie pour tout $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{dom\, f}$, nous parlerons d'un maximum ou d'un minimum ***absolu***.

Un ***extremum*** est une valeur extrême, c'est-à-dire soit un maximum soit un minimum.

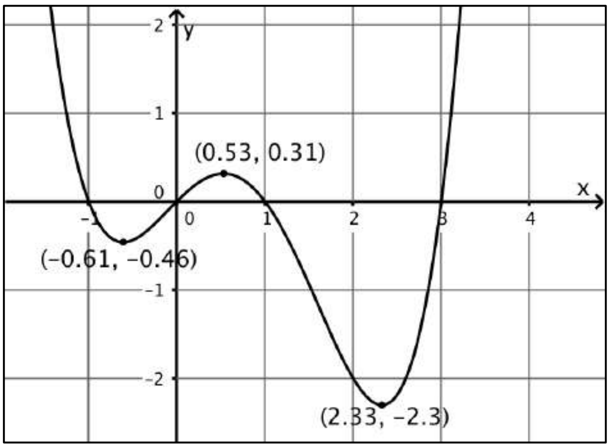
Approche algébrique :

Comme pour croissance et décroissance, tu apprendras à déterminer les minimums et maximums par calcul en cinquième année.

2.9.4. Tableau de variations

Les notions de maximum, minimum, croissance et décroissance sont souvent résumées dans un tableau de variations.

Exemple : Etablis le tableau de variations de la fonction suivante :



x	
$f(x)$	

2.10. Symétrie et parité d'une fonction

La notion de parité d'une fonction permet de mettre en évidence une éventuelle symétrie dans le graphique de cette fonction (axe y ou centre O). Quand une telle symétrie est présente, l'étude de la fonction peut se limiter, soit à l'ensemble des nombres positifs, soit à l'ensemble des nombres négatifs, selon le cas.

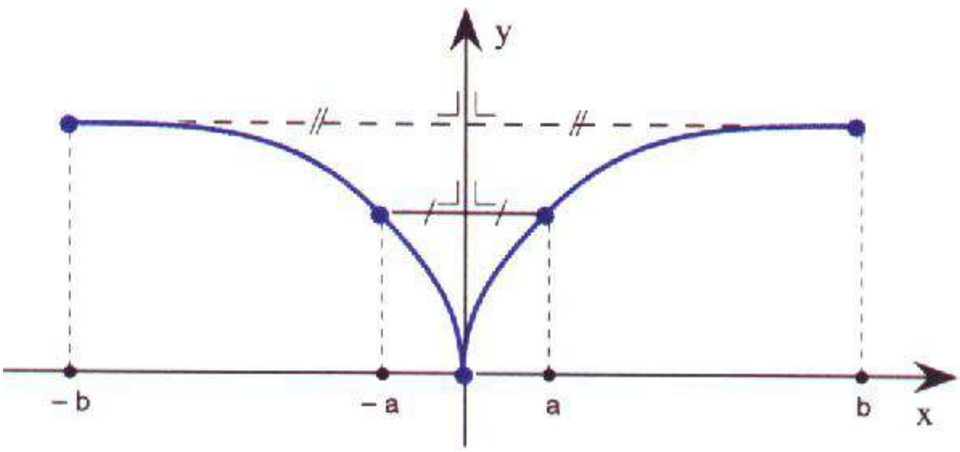
2.10.1. Fonction paire

L.L. : Une fonction f est **paire** si l'opposé de tout réel du domaine appartient aussi au domaine et si chaque réel et son opposé ont la même image.

L.M. : Une fonction f est **paire** si

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{dom\ f}, -\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{dom\ f} \text{ et } \boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

Exemple :



Le graphique d'une fonction paire admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

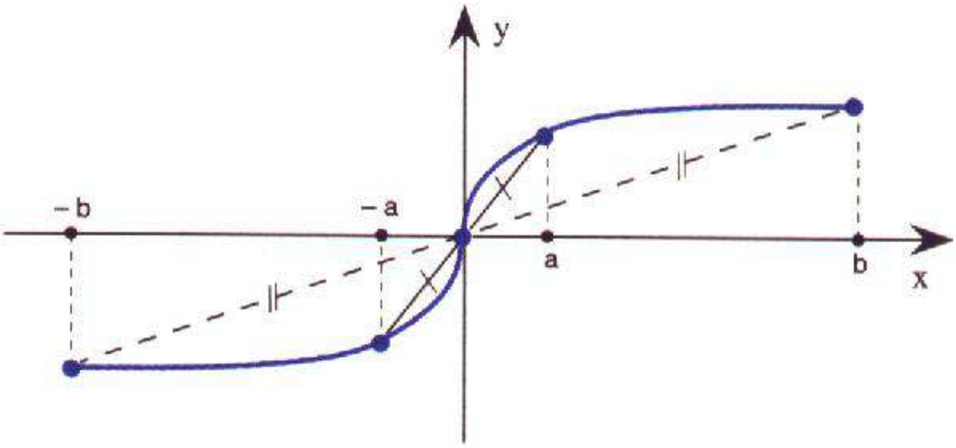
2.10.2. Fonction impaire

L.L. : Une fonction f est **impaire** si l'opposé de tout réel du domaine appartient aussi au domaine et si chaque réel et son opposé ont des images opposées.

L.M. : Une fonction f est **impaire** si

$$\forall x \in \boldsymbol{dom}\, \boldsymbol{f}, -x \in \boldsymbol{dom}\, \boldsymbol{f} \text{ et } \boldsymbol{f}(-x) = -\boldsymbol{f}(x)$$

Exemple :



Le graphique d'une fonction impaire admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

Remarques importantes :

1) La parité traduit des symétries de la fonction. Si le domaine de la fonction n'est pas symétrique par rapport à 0, la fonction ne pourra être ni paire ni impaire.
2) Une fonction qui n'est ni paire, ni impaire est dite ***quelconque***.

2.10.3. Recherche de la parité d'une fonction

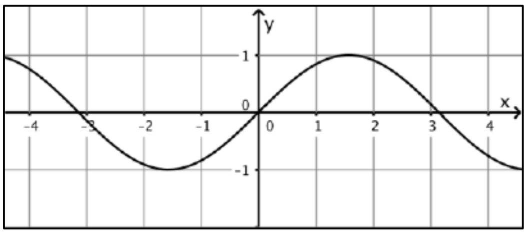
Approche graphique :

Pour trouver la parité d'une fonction, on regarde si son graphique présente une symétrie.

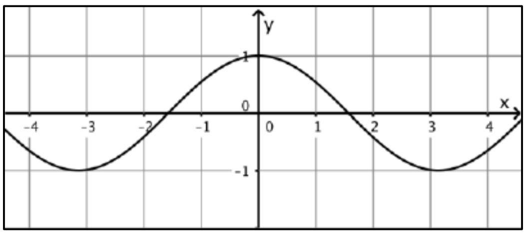
3) Si le graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (symétrie orthogonale), alors la fonction est paire.
4) Si le graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère (symétrie centrale), alors la fonction est impaire.

Exemple : Détermine la parité des fonctions suivantes.

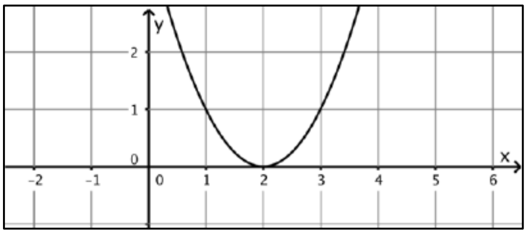
1) Fonction …………………………



2) Fonction …………………………



3) Fonction ....



Approche algébrique :

Pour déterminer par calcul la parité d'une fonction :

1) il faut vérifier que le domaine est symétrique par rapport à l'origine ;
2) il faut calculer $f(-x)$ c'est-à-dire qu'il faut remplacer tous les x par $-x$ dans l'expression analytique de la fonction. Si, après simplification,
   - on obtient la **même** forme analytique que la fonction de départ $f(x)$, la fonction est **paire**
   - on obtient une expression analytique **opposée** à celle de la fonction de départ (à savoir $-f(x)$), elle est **impaire**.

Exemple : Détermine par calcul la parité des fonctions suivantes.

1) $f(x) = 5x^2 + 4$

2) $f(x) = 4x^3 - 2x$

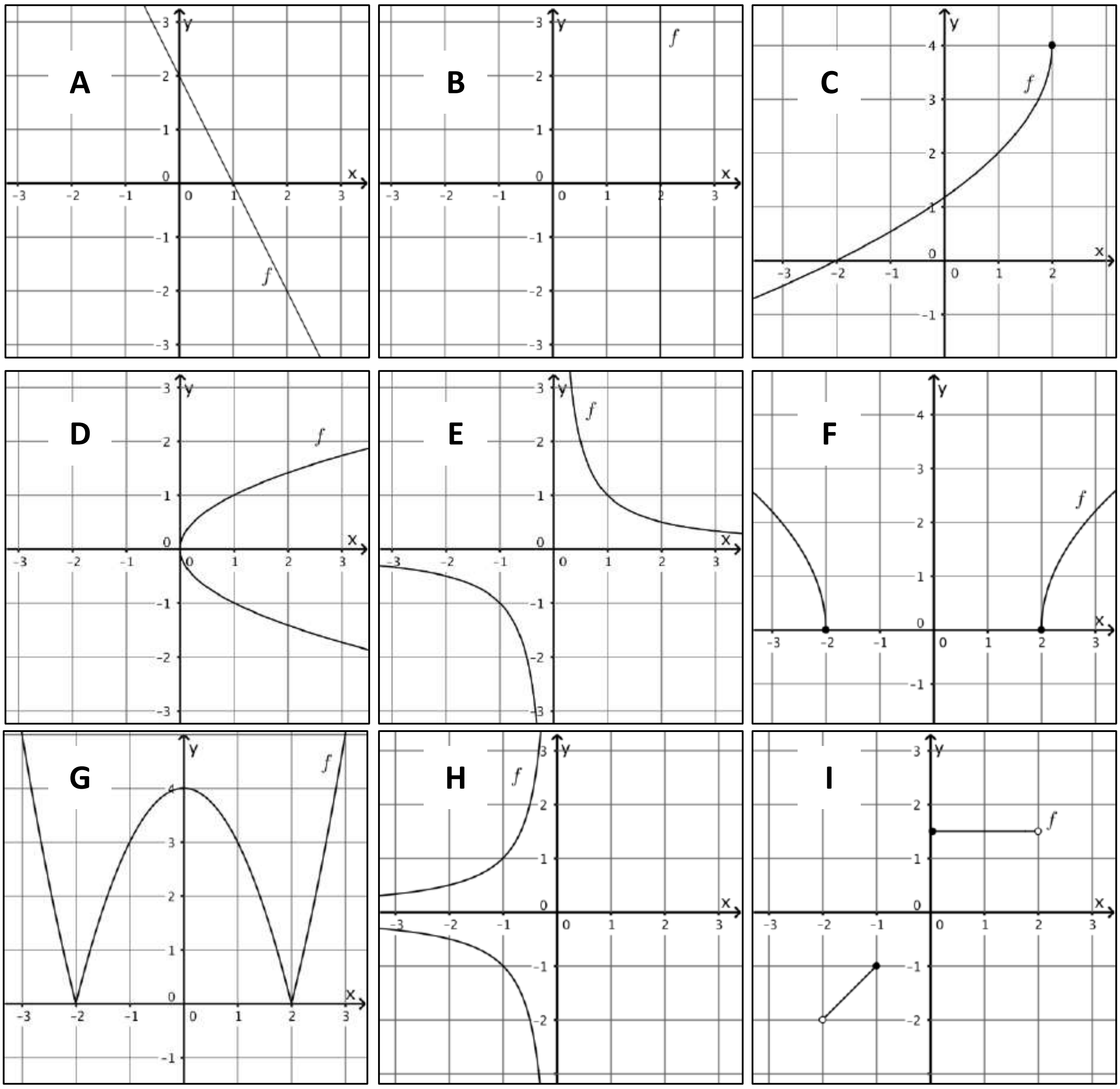
3) $f(x) = \sqrt{x+5}$

4) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4$

3. EXERCICES

Exercice 1

a) Parmi les graphiques représentés ci-dessous, quels sont ceux qui représentent une fonction ? Justifie tes choix.

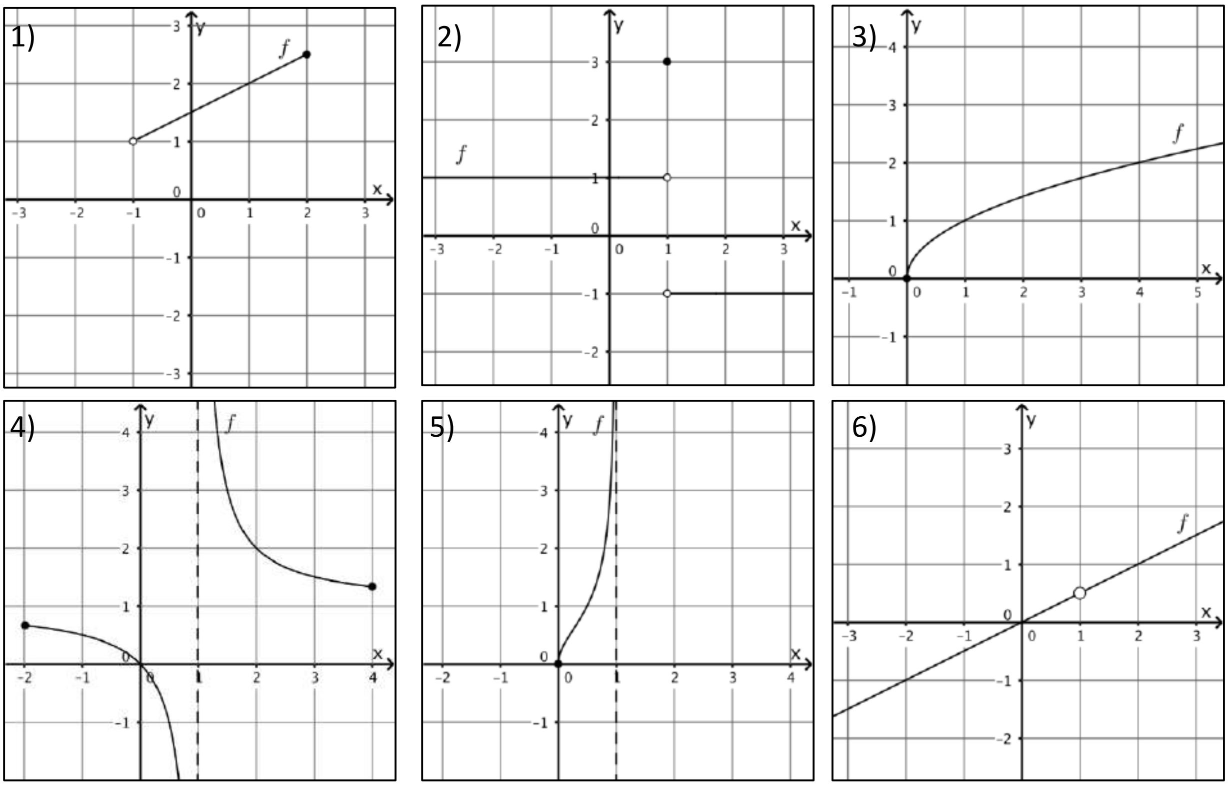


b) Pour chacune des ***fonctions*** représentées ci-dessus, détermine

1) son domaine
2) son ensemble image
3) son (ses) zéro(s)
4) sa parité
5) le(s) antécédent(s) de 2
6) l'image de 2
7) l'image de 0

Exercice 2

Associe chaque graphique de fonction au domaine de définition qui lui convient.



$dom\ f = \mathbb{R}_0$ $\qquad$ $dom\ f = \mathbb{R}$ $\qquad$ $dom\ f = [0\,,1[$

$dom\ f =]-1\,,2]$ $\qquad$ $dom\ f = \mathbb{R}^+$ $\qquad$ $dom\ f =]0,+\infty[$

$dom\ f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $\qquad$ $dom\ f = [-2\,,4] \setminus \{1\}$ $\qquad$ $dom\ f = [0\,,1]$

Exercice 3

Voici le tableau de variations d'une fonction f dont le domaine de définition est $[-1\,,9]$.

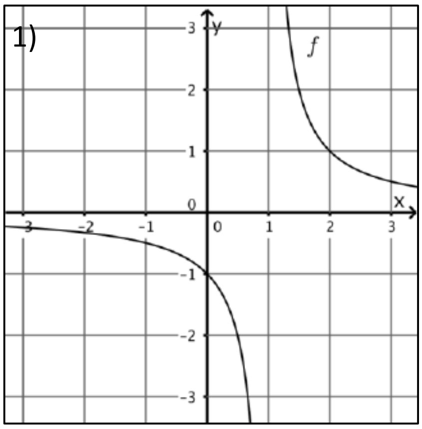
x	-1		2		4		5		9
Variations de $f(x)$	**-4**	↗	**0**	↗	**2**	↘	**0**	↘	**-2**

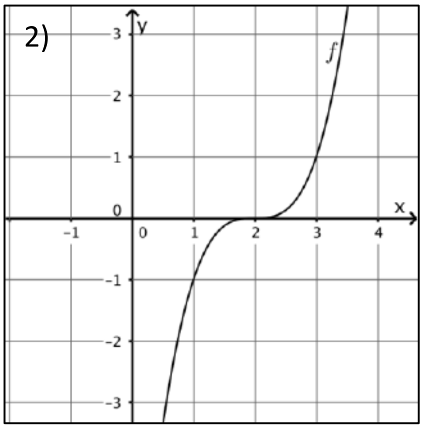
1) Trace une courbe qui pourrait représenter la fonction f.
2) Combien de solutions l'équation $f(x) = 0$ admet-elle ? Quelles sont ces solutions ?
3) Dresse le tableau de signes de cette fonction.

Exercice 4

Pour chacune des fonctions ci-dessous, résous graphiquement les équations et inéquations suivantes :

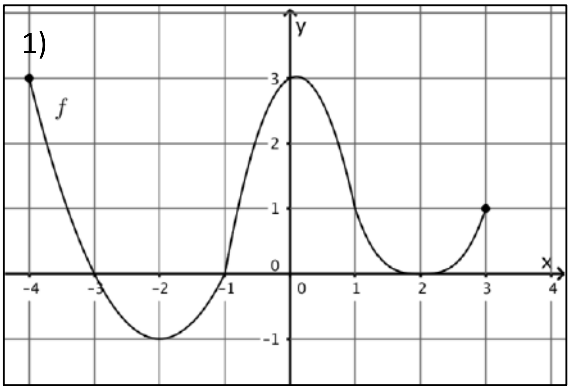
a) $f(x) = 0$
b) $f(x) \leq 0$
c) $f(x) > -1$

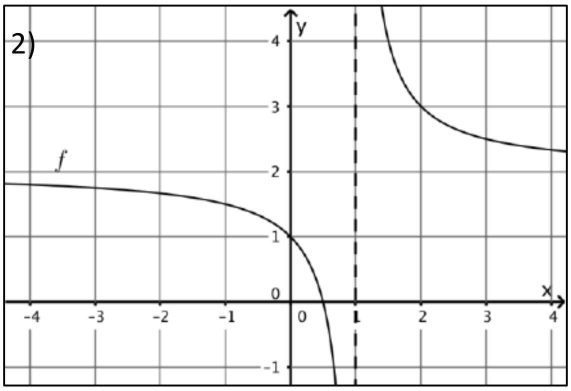




Exercice 5

Dresse le tableau de variations de chacune des fonctions dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :





Exercice 6

Pour chaque fonction f, détermine le domaine, le(s) zéro(s) ainsi que l'ordonnée à l'origine.

1) $f(x) = x^2 + 4$
2) $f(x) = \frac{2x}{2x-5}$
3) $f(x) = \frac{x^2-2x}{x^2-4}$
4) $f(x) = \sqrt{2-3x}$
5) $f(x) = \sqrt{x^2+6x+9}$
6) $f(x) = \sqrt{-2x^2+5x+3}$
7) $f(x) = \sqrt{-x^2+x-6}$
8) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-2}$
12) $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x}}$
13) $f(x) = \frac{\sqrt{3x-4x^2}}{\sqrt{x+1}}$
14) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2+x+1}}$
15) $f(x) = \sqrt{x-3} - \sqrt{2-x}$
16) $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{-3x^2-6x+24}}$
17) $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2-10x+3}}{3x+1}$
18) $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2-5x-3}}{x^2-3x-4}$
19) $f(x) = \frac{x^3-x}{x^3+4x^2-x-4}$

9) $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{\sqrt{x+4}}$

10) $f(x) = \sqrt{\frac{-x-2}{-x+3}}$

11) $f(x) = \frac{\sqrt{-x-2}}{\sqrt{-x+3}}$

20) $f(x) = \frac{x^3+x^2-14x-24}{\sqrt{x^2-2x-8}}$

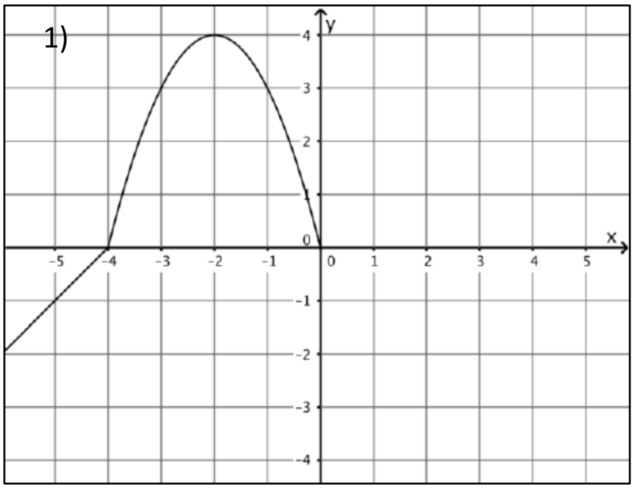
21) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$

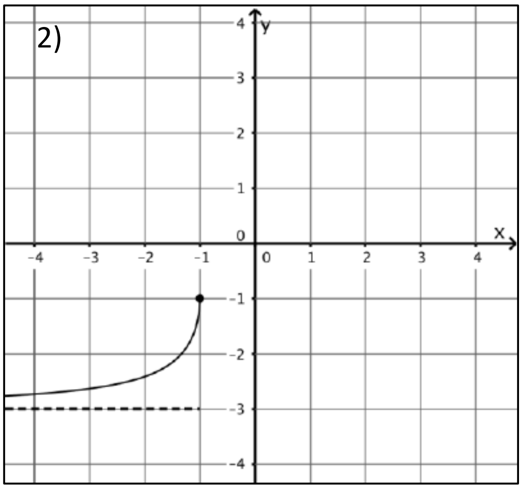
22) $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{-x^2+3x-2}}$

Exercice 7

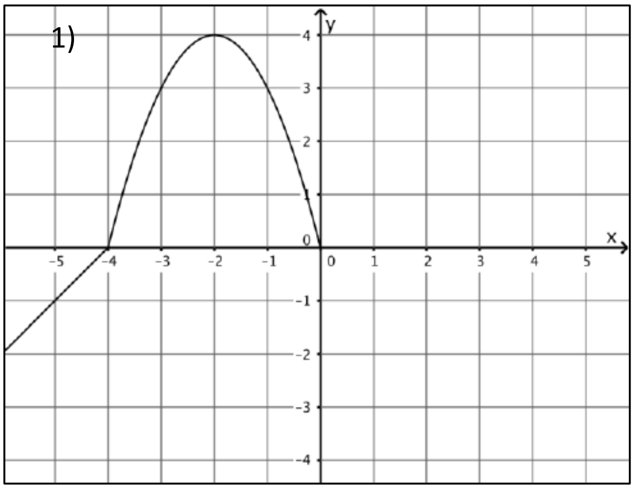
Complète les graphiques des fonctions suivantes sachant que celles-ci sont

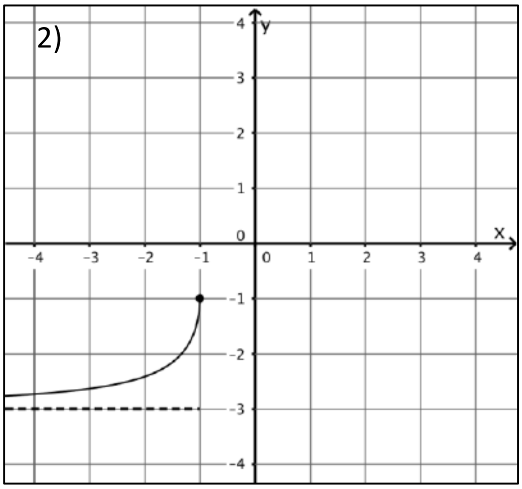
a) paires





b) impaires





Exercice 8

Sans construire le graphique des fonctions suivantes, détermine leur parité.

1) $f(x) = 5$
2) $f(x) = x$
3) $f(x) = 5x - 1$
6) $f(x) = \sqrt{x}$
7) $f(x) = x^4 - 2x^2$
8) $f(x) = x^3 + 2x^2$

4) $f(x) = x^2 - 1$

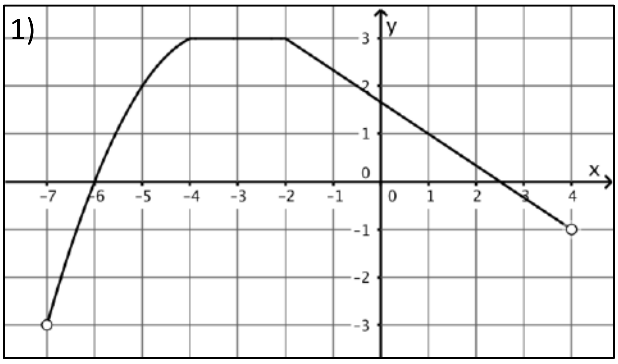
5) $f(x) = x^3 - x$

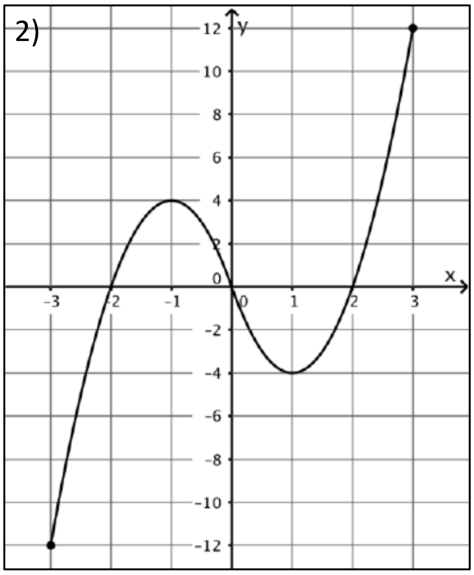
9) $f(x) = \frac{5}{x^2-4}$

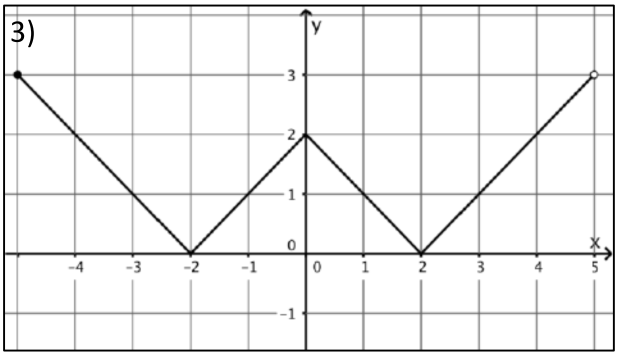
10) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

Exercice 9

Voici les graphiques de trois fonctions.







Pour chacune d'entre elles, réponds aux questions suivantes :

a) Quel est le domaine de la fonction ?

b) Quel est l'ensemble image de la fonction ?

c) Sur quel(s) ensemble(s) la fonction est-elle négative ?

d) Sur quel(s) ensemble(s) la fonction est-elle croissante ?

e) Sur quel(s) ensemble(s) la fonction est-elle décroissante ?

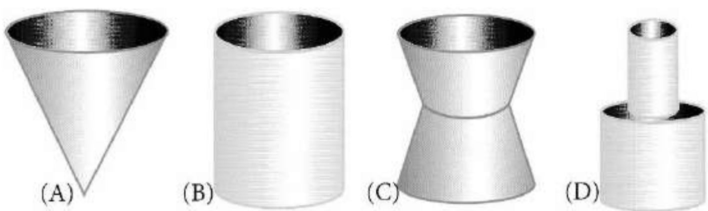
f) Sur quel(s) ensemble(s) la fonction est-elle constante ?

g) Quelle est la parité de la fonction ? Justifie ta réponse.

h) Quels sont les extrema locaux et/ou globaux de la fonction et en quelles valeurs de la variable sont-ils atteints ?

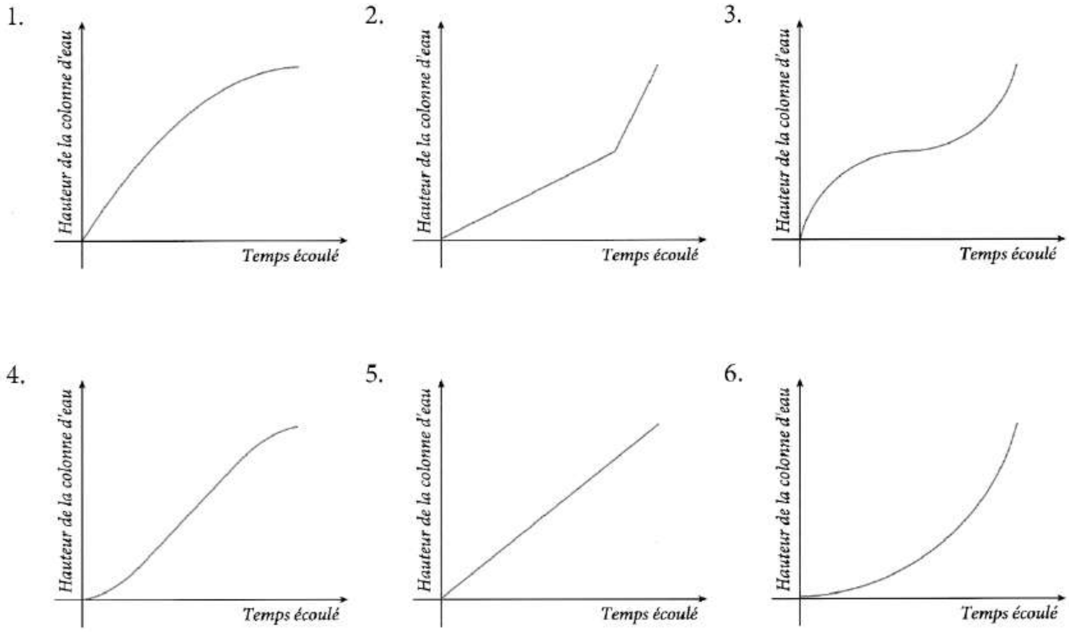
Exercice 10

Les récipients suivants ont la même hauteur et la même capacité. Ils sont remplis successivement avec un robinet à débit constant.



Les graphiques ci-dessous représentent, pour chacun des récipients, la hauteur de la colonne d'eau dans le récipient en fonction du temps écoulé depuis le début du remplissage.

Associe à chaque récipient la courbe qui lui correspond.



Exercice 11

Représente le graphique d'une fonction f qui satisfait aux conditions suivantes :

1) $dom\, f = [-3,2]$

   $f(-3) = 1$

   f admet $\frac{1}{2}$ et 2 comme seuls zéros

   f admet un maximum en $x = -1$ et un minimum en $x = 1$
2) $dom\, f =]-3,3[$

   f est une fonction paire

   le point $(-3,-2)$ est un trou du graphique de f

   f est strictement croissante sur$]-3,-1[$ et constante sur $]-1,0[$

   le zéro de f sur $]-3,0[$ est -2.

3) $dom\, f = [-2,2]$

f est une fonction impaire

l'image de 2 par f est 3

f est strictement croissante sur$]0,2[$

Exercice 12

Une des conséquences du réchauffement de notre planète est la fonte de certains glaciers.

Douze ans après la disparition de la glace, de minuscules plantes, appelées lichens, font leur apparition sur les rochers. Au long de sa croissance, chaque lichen se développe à peu près en forme de cercle.

La relation entre le diamètre de ce cercle et l'âge du lichen peut être calculée de manière approximative par la formule :

$$d = 7\sqrt{t-12} \text{ pour } t \geq 12$$

où d est le diamètre du lichen en millimètres et t le nombre d'années écoulées après la disparition de la glace.

1) En utilisant la formule, calcule le diamètre du lichen 16 ans après la disparition de la glace.
2) En considérant d comme fonction de t, détermine le domaine de validité du problème et l'ensemble des valeurs atteintes par cette fonction.
3) Un scientifique a mesuré le diamètre d'un lichen et a trouvé 35 mm. Depuis combien de temps la glace a-t-elle disparu à cet endroit précis ?

Exercice 13

Une fonction f dont le domaine de définition est $]-2,+\infty[$ admet le tableau de variations suivant :

x	-2		1		5		$+\infty$
Variations de $f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	4	↘	0

Chacune des affirmations suivantes est elle vraie, fausse ou indécidable ?

1) $f(0) \geq -3$
2) $f(3) = 1$
3) $f(0) \leq f(6)$
4) 2 a trois antécédents
5) $5 < x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

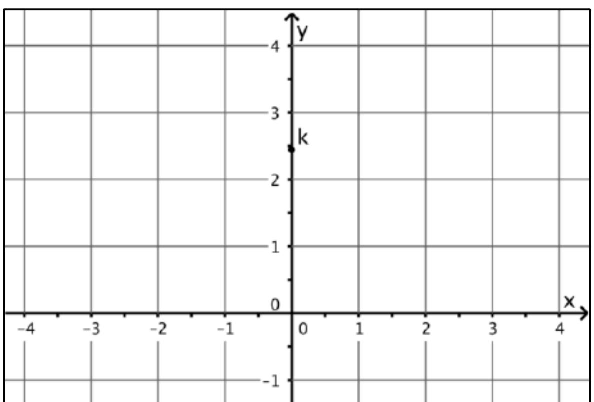
4. FONCTIONS DE REFERENCE

4.1. Fonction constante

$$\boxed{f(x) = k}$$

Tableau de valeurs :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					



Caractéristiques de la fonction :

- $dom\ f$: ___________________________
- $im\ f$: ____________________________
- zéro(s) de f : _______________________
- parité de f : _________________________
- ordonnée à l'origine : _______________
- extrema de f : ______________________
- variations de f :

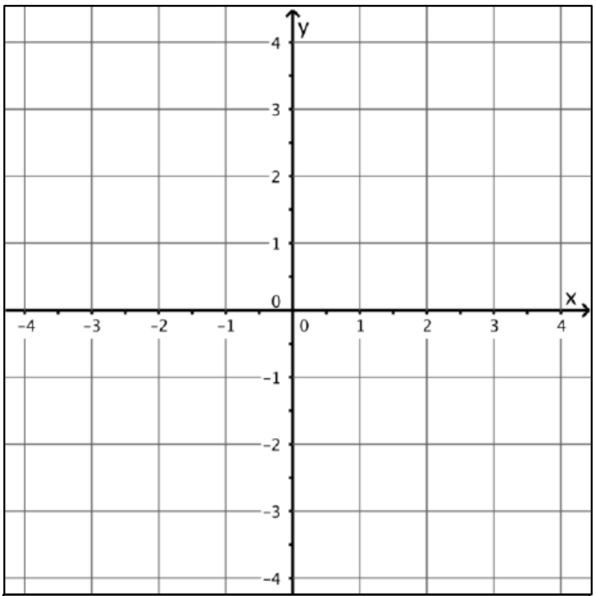
x	
$f(x)$	

4.2. Fonction identique

$$\boxed{f(x) = x}$$

Tableau de valeurs :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					



Le graphique de cette fonction est une droite passant par l'origine des axes.

Caractéristiques de la fonction :

- $dom\ f$: ___________________________
- $im\ f$: ____________________________
- zéro(s) de f : _______________________
- parité de f : _________________________
- ordonnée à l'origine : _______________
- extrema de f : ______________________
- variations de f :

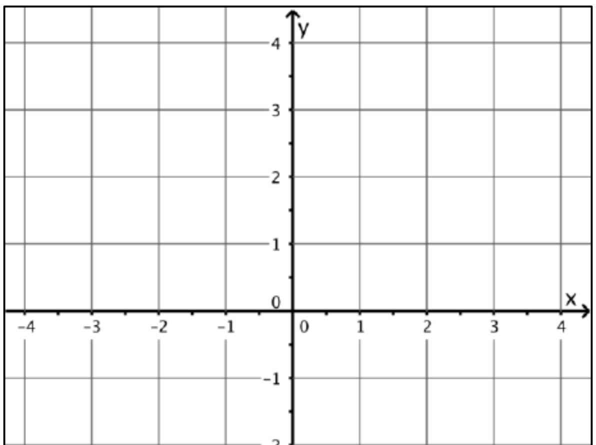
x	
$f(x)$	

4.3. Fonction valeur absolue

$$\boxed{f(x) = |x|}$$

Tableau de valeurs :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					



Caractéristiques de la fonction :

- $dom\ f$: ______________________
- $im\ f$: ______________________
- zéro(s) de f : ______________________
- parité de f : ______________________
- ordonnée à l'origine : ______________
- extrema de f : ______________________
- variations de f :

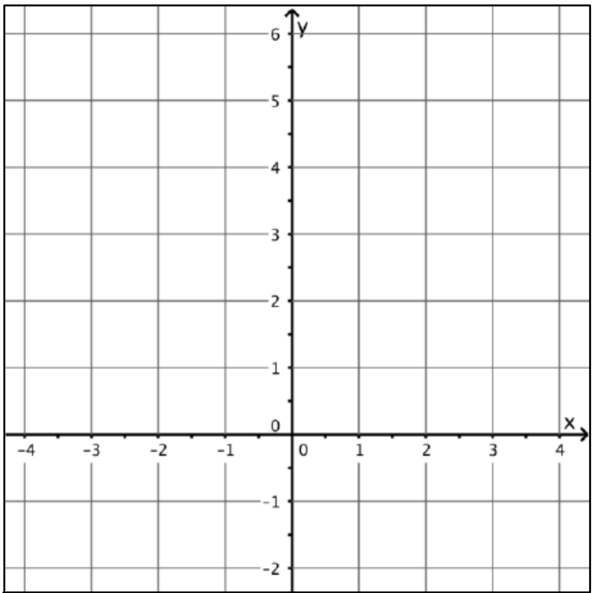
x	
$f(x)$	

4.4. Fonction carré

$$\boxed{f(x) = x^2}$$

Tableau de valeurs :

x	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**
$f(x)$					



Le graphique de cette fonction est une parabole.

Caractéristiques de la fonction :

- $dom\ f$: ______________________
- $im\ f$: ______________________
- zéro(s) de f : ______________________
- parité de f : ______________________
- ordonnée à l'origine : ______________
- extrema de f : ______________________
- variations de f :

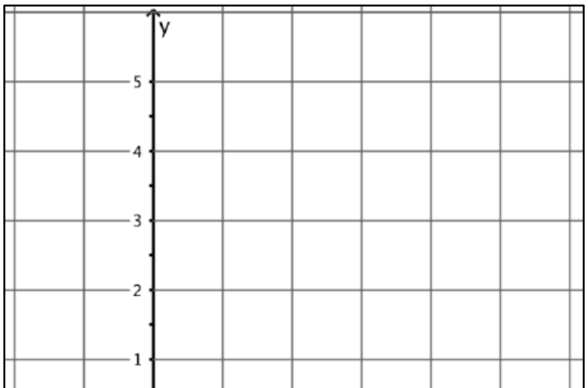
x	
$f(x)$	

4.5. Fonction racine carrée

$$\boxed{f(x) = \sqrt{x}}$$

Tableau de valeurs :

x	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
$f(x)$							



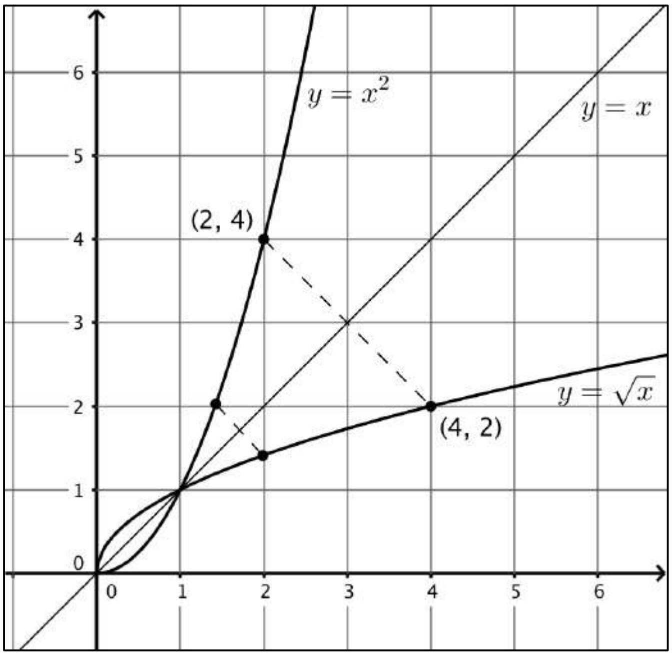
Caractéristiques de la fonction :

- $dom\ f$: ___________________________
- $im\ f$: ____________________________
- zéro(s) de f : _______________________
- parité de f : ________________________
- ordonnée à l'origine : _____________
- extrema de f : ______________________
- variations de f :

x	
$f(x)$	

Remarque

Les graphiques des fonctions "carré" et "racine carrée" sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ sur l'ensemble des réels positifs.



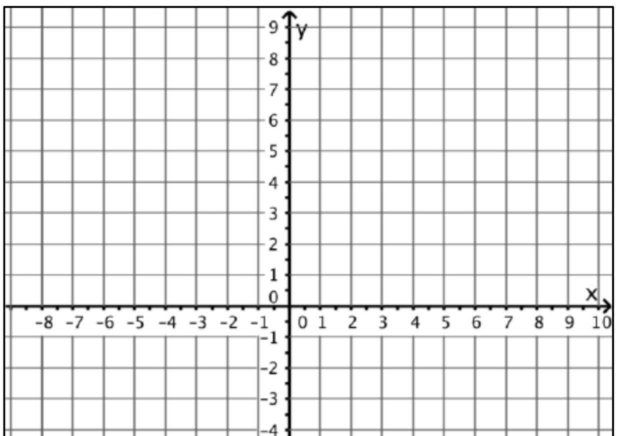
Nous dirons que $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$ sont des **fonctions réciproques** sur $\mathbb{R}^+$.

4.6. Fonction cubique

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = x^3}}$$

Tableau de valeurs :

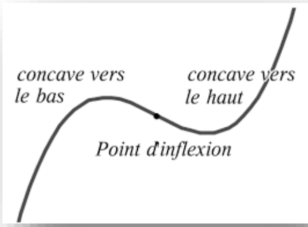
x	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**
$f(x)$					



Caractéristiques de la fonction :

- $dom\ f$: ______________________________
- $im\ f$: ________________________________
- zéro(s) de f : _________________________
- parité de f : ___________________________
- ordonnée à l'origine : _________________
- extrema de f : _________________________
- variations de f :

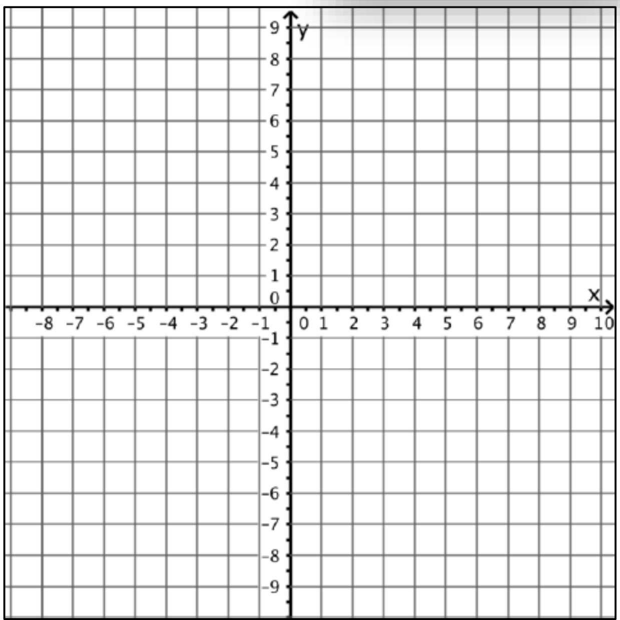
x	
$f(x)$	



4.7. Fonction racine cubique $\boxed{f(x) = \sqrt[3]{x}}$

Tableau de valeurs :

x	-8	-1	0	1	8
$f(x)$					



La concavité de la courbe change en $(0{,}0)$. Nous dirons que ce point est un **point d'inflexion**.

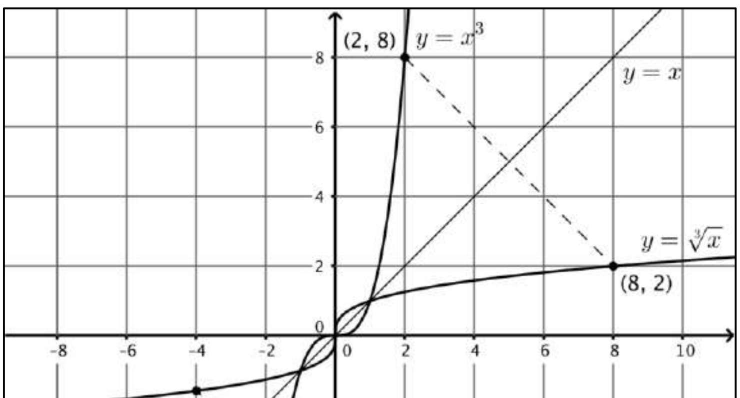
Caractéristiques de la fonction :

- $dom\ f$: ______________________________
- $im\ f$: ________________________________
- zéro(s) de f : _________________________
- parité de f : ___________________________
- ordonnée à l'origine : _________________
- extrema de f : _________________________
- variations de f :

x	
$f(x)$	

Remarque

Les graphiques des fonctions "cubique" et "racine cubique" sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ sur l'ensemble des réels.



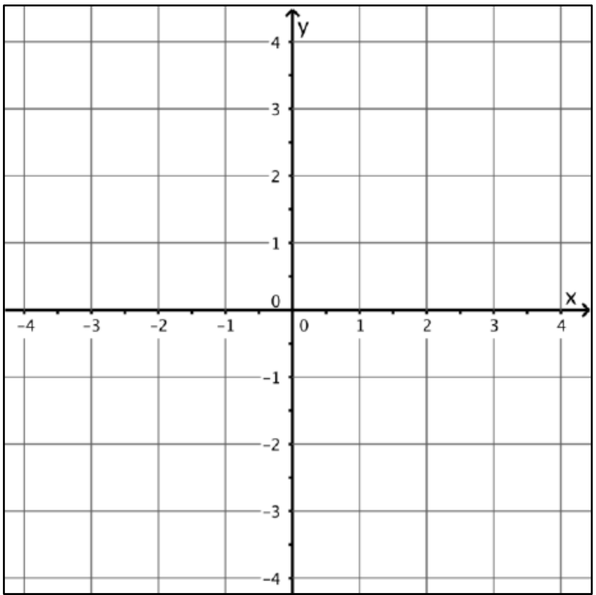
Nous dirons que $f(x) = x^3$ et $g(x) = \sqrt[3]{x}$ sont des **fonctions réciproques** sur $\mathbb{R}$.

4.8. Fonction inverse

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x}}$$

Tableau de valeurs :

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$							



Le graphique de cette fonction est une **hyperbole**. Nous dirons que les axes du repère sont des **asymptotes**.

Caractéristiques de la fonction :

- $dom\ f$: ____________________________
- $im\ f$: ____________________________
- zéro(s) de f : ________________________
- parité de f : _________________________
- ordonnée à l'origine : ________________
- extrema de f : _______________________
- variations de f :

x	
$f(x)$	

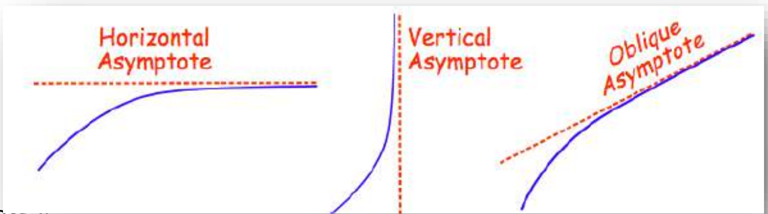
5. TRANSFORMEES DE FONCTIONS

Au départ des fonctions de référence que nous venons de découvrir, il est possible d'établir le graphique de nombreuses fonctions.

5.1. Transformées de fonction par translation

Dans cette partie, nous allons apprendre comment identifier les transformations de fonctions impliquant des translations horizontales et verticales :

- la direction horizontale est liée à la variable x

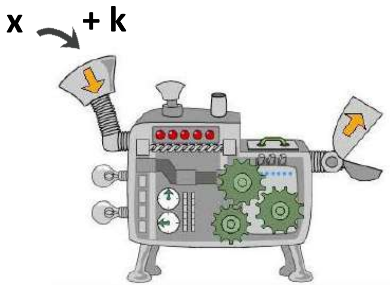


- la direction verticale à son image c'est-à-dire : $f(x)$ ou y

Commençons par nous intéresser aux transformations de fonctions induisant des déplacements horizontaux.

Translations « horizontales » (parallèles à l'axe des x) **: f(x) → f(x + k)**

Approche algébrique :



Que se passe t'il si dans une fonction f(x), nous remplaçons la variable « x » :

1) Si x → x – 3 alors f(x) → f(x – 3)
2) Si x → x + 2 alors f(x) → f(x + 2)

Pour comprendre pourquoi cette transformation de fonction entraîne une translation horizontale sur le graphique, regardons le tableau de valeurs de la fonction $f(x)$:

x	-3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	$f(-3)$	$f(-2)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$
$f(x-3)$	$f(-6)$	$f(-5)$	$f(-4)$	$f(-3)$	$f(-2)$	$f(-1)$	$f(0)$

On peut noter que la ligne des images de $f(x-3)$ peut être obtenue en décalant la ligne des images de $f(x)$ de 3 cases vers la droite. Cela signifie que la courbe représentative de $f(x-3)$ est obtenue en **déplaçant la courbe représentative de $f(x)$ de 3 unités vers la droite**.

x	-3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	$f(-3)$	$f(-2)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$
$f(x+2)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$	$f(5)$

De même, la ligne des images de $f(x+2)$ est obtenue à partir de la ligne des images de $f(x)$ par un décalage de deux cases vers la gauche. Par conséquent, la courbe représentative de $f(x+2)$ s'obtient par **un déplacement horizontal de 2 unités vers la gauche**.

Approche graphique :

Pour construire le graphique de la fonctions $f(x-3)$, il faut ……………………………………………… à l'abscisse de chaque point du graphique de la fonction f.

Pour construire le graphique de la fonctions $f(x+2)$, il faut ……………………………………………… à l'abscisse de chaque point du graphique de la fonction f.

Le graphique de la fonction $f(x+k)$ est obtenu à partir du graphique de la fonction $f(x)$ par la ***translation horizontale*** (parallèle à l'axe des x) ***de « k » unités*** ;

- **Vers la gauche si k $>$ 0**
- **Vers la droite si k $<$ 0**

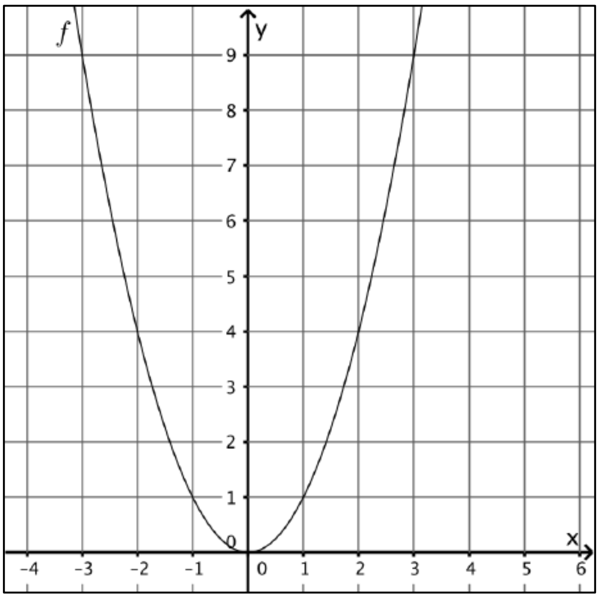
Exemples :

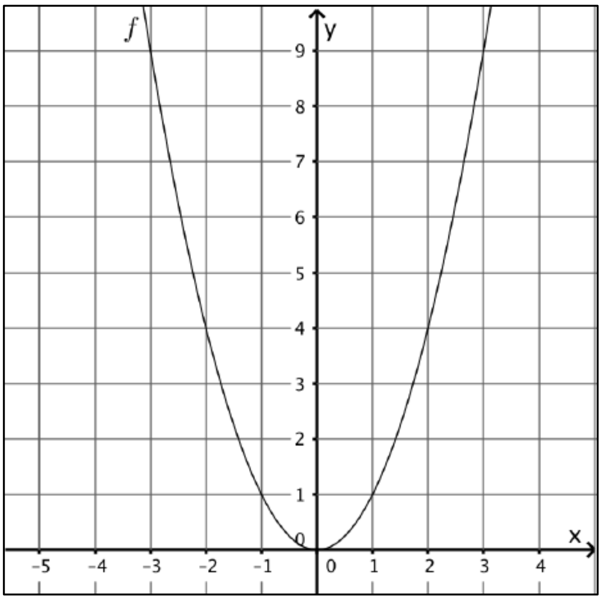
Fonction de référence : f(x) = x².

x	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**
$f(x) = x^2$							

Complète et représente ci-dessous

f(x + 3) = ____________________ f(x – 2) = ____________________





Si nécessaire, aide toi des tableaux de valeurs ci-dessous :

x	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**
………							

x	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**
………							

Description de la transformation :

Description de la transformation :

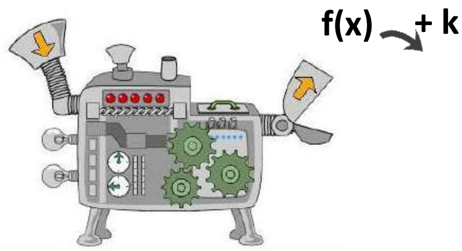
Lien géogébra :

https://www.geogebra.org/m/SmqpvybK

Translations « verticales » (parallèles à l'axe des y) **: f(x) → f(x) + k**

Approche algébrique :

La notation $f(x) \to f(x) + \mathrm{k}$ signifie que nous ajoutons directement le nombre **k** à l'expression de la fonction.



1) Si f(x) → f(x) – 3
2) Si f(x) → f(x) + 2

Pour comprendre pourquoi cette transformation de fonction entraîne une translation verticale sur le graphique, regardons les tableaux de valeurs ci-dessous :

x	-3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	$f(-3)$	$f(-2)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$

$f(x) - 3$	$f(-3)$ - 3	$f(-2)$ - 3	$f(-1)$ - 3	$f(0)$ - 3	$f(1)$ - 3	$f(2)$ - 3	$f(3)$ - 3

On peut comprendre cette transformation assez facilement. Le fait de soustraire 3 unités à l'expression $f(x)$ de la fonction modifie l'ordonnée y de chacun des points de la courbe. Ainsi, la courbe représentative de **$f(x)$ - 3** peut être obtenue en **déplaçant la courbe représentative de $f(x)$ de 3 unités vers le bas.**

$f(x) + 2$	$f(-3) + 2$	$f(-2) + 2$	$f(-1) + 2$	$f(0) + 2$	$f(1) + 2$	$f(2) + 2$	$f(3) + 2$

Le fait d'ajouter 2 unités à l'expression $f(x)$ de la fonction modifie l'ordonnée y de chacun des points de la courbe. Ainsi, la courbe représentative de **$f(x)$ + 2** peut être obtenue en **déplaçant la courbe représentative de $f(x)$ de 2 unités vers le haut**.

Approche graphique :

Pour construire le graphique de la fonctions $f(x) - 3$, il faut …………………………………………… à l'ordonnée de chaque point du graphique de la fonction f.

Pour construire le graphique de la fonctions $f(x) + 2$, il faut …………………………………………… à l'ordonnée de chaque point du graphique de la fonction f.

Contrairement au changement de la variable x, l'effet géométrique de la transformation de fonction via l'ajout d'une constante à $f(x)$ n'est pas contre intuitive. On « **monte** » quand on modifie l'expression $f(x)$ en lui **ajoutant une valeur positive** ; on « **descend** » quand on modifie l'expression $f(x)$ en lui **ajoutant une valeur négative**

Le graphique de la fonction $f(x) + k$ est obtenu à partir du graphique de la fonction $f(x)$ par la ***translation verticale*** (parallèle à l'axe des y) ***de « k » unités*** ;

- **Vers le haut si k $>$ 0**
- **Vers le bas si k $<$ 0**

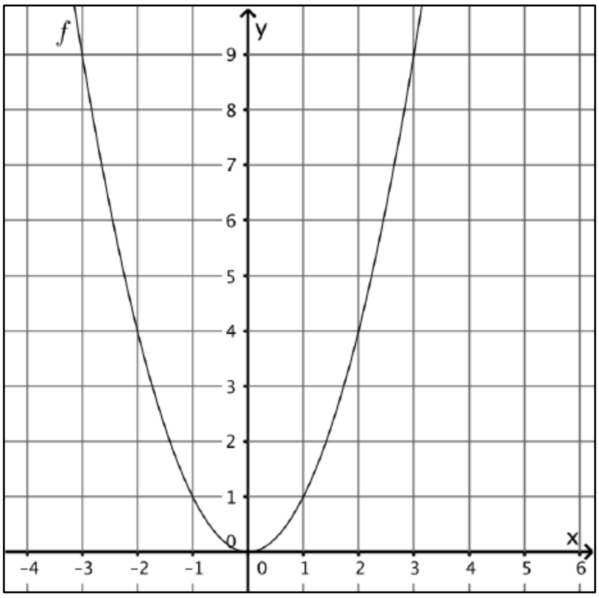
Exemples :

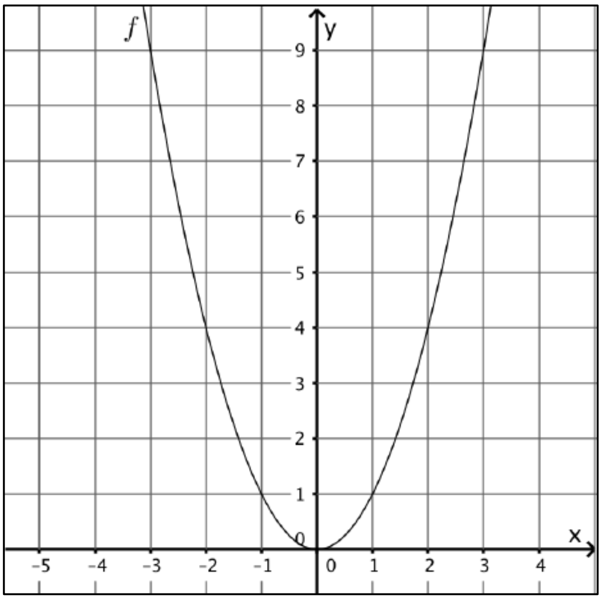
Fonction de référence : $f(x) = x^2$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = x^2$							

Complète et représente ci-dessous

$f(x) + 3 =$ ____________________ $f(x) - 2 =$ ____________________





Si nécessaire, aide toi des tableaux de valeurs ci-dessous :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
………							

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
………							

Description de la transformation :

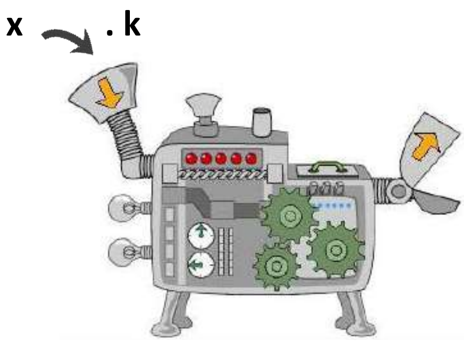
Description de la transformation :

Affinités « horizontales » (parallèles à l'axe des x) **: f(x) → f(k.x)**

Approche algébrique :

La notation $f(x) \rightarrow f(\mathbf{k}.x)$ signifie que nous multiplions la variable « x » par le nombre **k** avant qu'elle ne subisse l'effet de la fonction f(x) :

1) Si k = 2, alors $f(x) \rightarrow f(2.x)$
2) Si k = $\frac{1}{2}$, alors $f(x) \rightarrow f(\frac{1}{2}.x)$



Pour comprendre quelle transformation la fonction f(x) subit, nous allons partir de ces deux exemples. Représente le graphique des fonctions suivantes en t'aidant du tableau de valeurs ci-dessous.

$f(x) = \sqrt{x}$

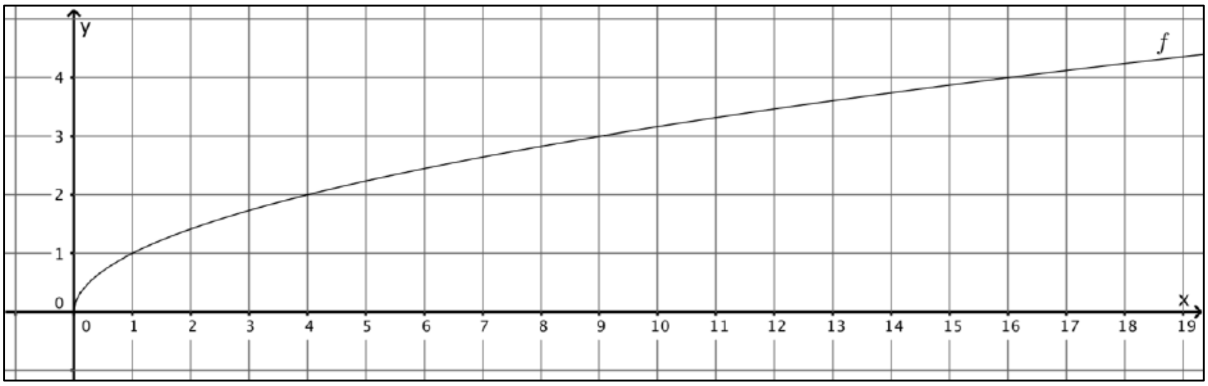
$\boldsymbol{x}$	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
$\boldsymbol{f(x)}$											

$f(3x) = \sqrt{2x}$

$\boldsymbol{x}$	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
$\boldsymbol{f(x)}$											

$f\left(\frac{1}{2}x\right) = \sqrt{\frac{x}{2}}$

$\boldsymbol{x}$	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
$\boldsymbol{f(x)}$											



Approche graphique :

Comme pour les translations horizontales, la transformation que subit la fonction f(x) est contraire à l'intuition :

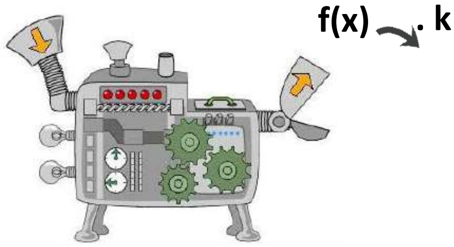
- Pour construire le graphique de la fonctions $f(2.x)$, il faut ……………………………………………… l'abscisse de chaque point du graphique de la fonction f par 2 alors **<u>que x a été multiplié par deux dans l'expression analytique</u>**.
- Pour construire le graphique de la fonctions $f(\frac{1}{2}.x)$, il faut ……………………………………………… l'abscisse de chaque point du graphique de la fonction f par $\frac{1}{2}$ **<u>(multiplié par 2)</u>** alors **<u>que x a été multiplié par $\frac{1}{2}$</u> (diviser par 2) <u>dans l'expression analytique</u>**.

Le graphique de la fonction $f(k.x)$ est obtenu à partir du graphique de la fonction $f(x)$ de la manière suivante :

- Si k > 1, le graphique de f(x) subit **<u>une compression parallèlement à l'axe des x</u>**
- Si 0 < k < 1, le graphique de f(x) subit **<u>un étirement parallèlement à l'axe des x</u>**.

Affinités « verticales » (parallèles à l'axe des y) : f(x) → k.f(x)

Approche algébrique :



La notation $\boldsymbol{f(x) \to k.f(x)}$ signifie que nous multiplions la variable « x » par le nombre **k** avant qu'elle ne subisse l'effet de la fonction f(x) :

1) Si k = 2, alors f(x) → 2 . f(x)
2) Si k = $\frac{1}{2}$, alors f(x) → $\frac{1}{2}$. f(x)

Pour comprendre pourquoi cette transformation de fonction entraîne une compression ou un étirement vertical sur le graphique, regardons les tableaux de valeurs ci-dessous :

x	-3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	$f(-3)$	$f(-2)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$

$2.f(x)$	$2.f(-3)$	$2.f(-2)$	$2.f(-1)$	$2.f(0)$	$2.f(1)$	$2.f(2)$	$2.f(3)$

On peut comprendre cette transformation assez facilement. Le fait de multiplier par 2 l'expression de la fonction modifie l'ordonnée y de chacun des points de la courbe. Ainsi, la courbe représentative de $\boldsymbol{2.f(x)}$ peut être obtenue en **étirant la courbe représentative de $f(x)$.**

$\frac{1}{2}.f(x)$	$\frac{1}{2}.f(-3)$	$\frac{1}{2}.f(-2)$	$\frac{1}{2}.f(-1)$	$\frac{1}{2}.f(0)$	$\frac{1}{2}.f(1)$	$\frac{1}{2}.f(2)$	$\frac{1}{2}.f(3)$

Le fait de multiplier par $\frac{1}{2}$ l'expression de la fonction modifie l'ordonnée y de chacun des points de la courbe. Ainsi, la courbe représentative de $\boldsymbol{\frac{1}{2}.f(x)}$ peut être obtenue en c**ompressant la courbe représentative de $f(x)$.**

Approche graphique :

Pour construire le graphique de la fonctions $2.f(x)$, il faut …………………………………………… l'ordonnée de chaque point du graphique de la fonction f.

Pour construire le graphique de la fonctions $\frac{1}{2}.f(x)$, il faut …………………………………………… l'ordonnée de chaque point du graphique de la fonction f.

Contrairement au changement de la variable x, l'effet géométrique de la transformation de fonction k.$f(x)$ n'est pas contre intuitive. On « **étire** » le graphique de $f(x)$ quand **le facteur k est plus grand que 1** ; on « **compresse** » le graphique de $f(x)$ quand **le facteur k est plus petit que 1**

Le graphique de la fonction $k.f(x)$ est obtenu à partir du graphique de la fonction $f(x)$ de la manière suivante :

- Si k > 1, le graphique de f(x) subit **un étirement parallèlement à l'axe des y**
- Si 0 < k < 1, le graphique de f(x) subit **une compression parallèlement à l'axe des y**.

Pour comprendre quelle transformation la fonction f(x) subit, nous allons partir de ces deux exemples. Représente le graphique des fonctions suivantes en t'aidant du tableau de valeurs ci-dessous. $f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = 2\sqrt{x}$ $h(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ $i(x) = -2\sqrt{x}$

$f(x) = \sqrt{x}$

$\boldsymbol{x}$	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
$\boldsymbol{f(x)}$											

$2. f(x) = 2. \sqrt{2}$

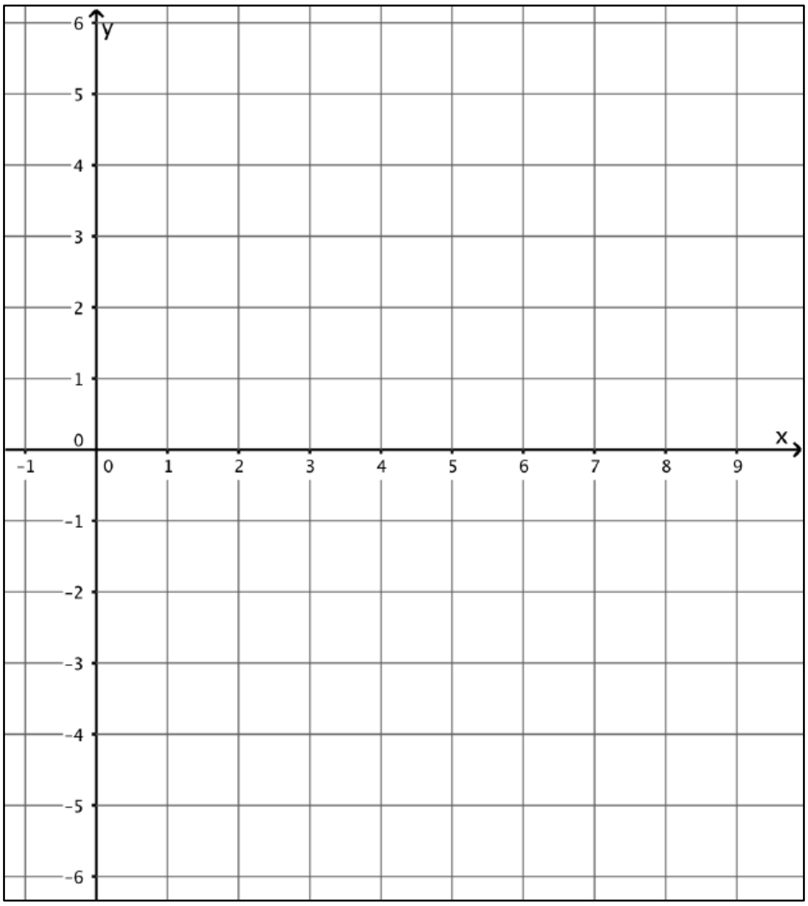
$\boldsymbol{x}$	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
$\boldsymbol{f(x)}$											

$\frac{1}{2}. f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$

$\boldsymbol{x}$	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
$\boldsymbol{f(x)}$											

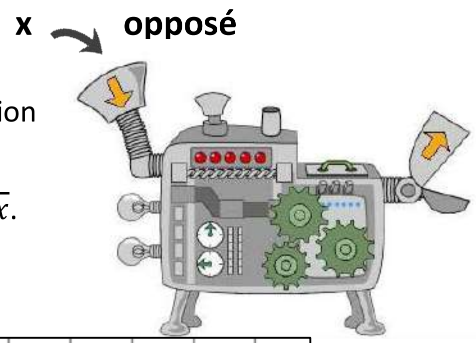
$-2. f(x) = -2. \sqrt{x}$

$\boldsymbol{x}$	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
$\boldsymbol{f(x)}$											



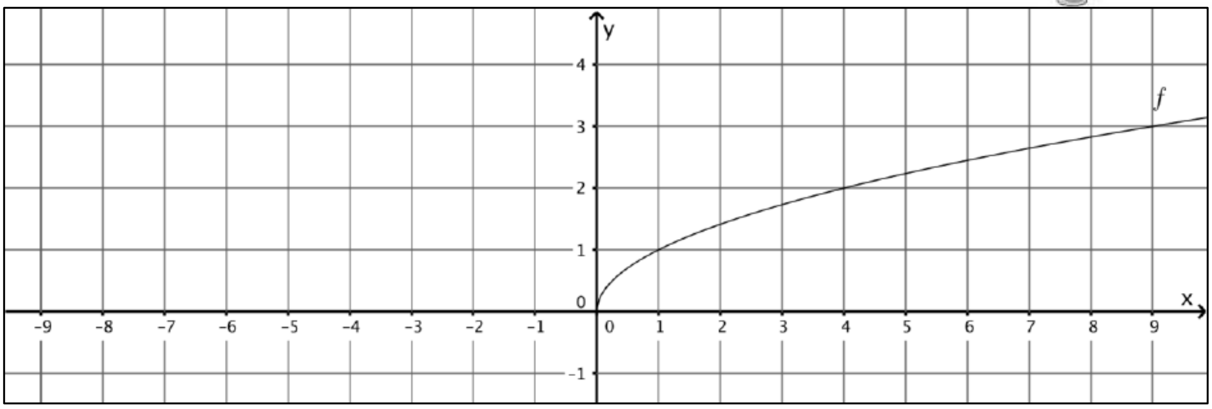
Symétrie axiale d’axe « y » : f(x) → f(-x)

Approche algébrique :



La notation $f(x) \to f(-x)$ signifie que nous prenons **l’opposé** de la variable « x » avant qu’elle ne subisse l’effet de la fonction f(x) :

Représente les graphiques des fonctions $f(x) = \sqrt{x}$ et $f(-x) = \sqrt{-x}$.



Pour comprendre pourquoi cette transformation de fonction entraîne une symétrie axiale d’axe « y », regardons le tableau de valeurs de la fonction $f(x)$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$f(-3)$	$f(-2)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$
$f(-x)$	$f(3)$	$f(2)$	$f(1)$	$f(0)$	$f(-1)$	$f(-2)$	$f(-3)$

On peut noter que la ligne des images de $f(-x)$ peut être obtenue à partir d’une symétrie des images de $f(x)$ par rapport à f(0). Comme les ordonnées restent identiques, cela signifie que la courbe représentative de $f(-x)$ est obtenue en **réalisant une symétrie d’axe « y » de la courbe représentative de $f(x)$**.

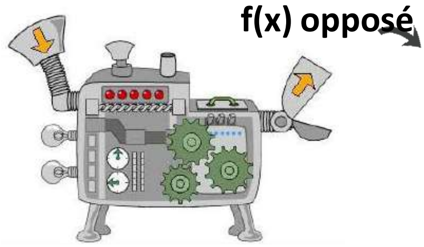
Approche graphique :

Pour construire le graphique de la fonctions $f(-x)$, il faut construire le symétrique de chaque point du graphique de la fonction f par rapport à l’axe y.

Le graphique de la fonction $f(-x)$ est obtenu à partir du graphique de la fonction $f(x)$ par la ***symétrie d’axe y***

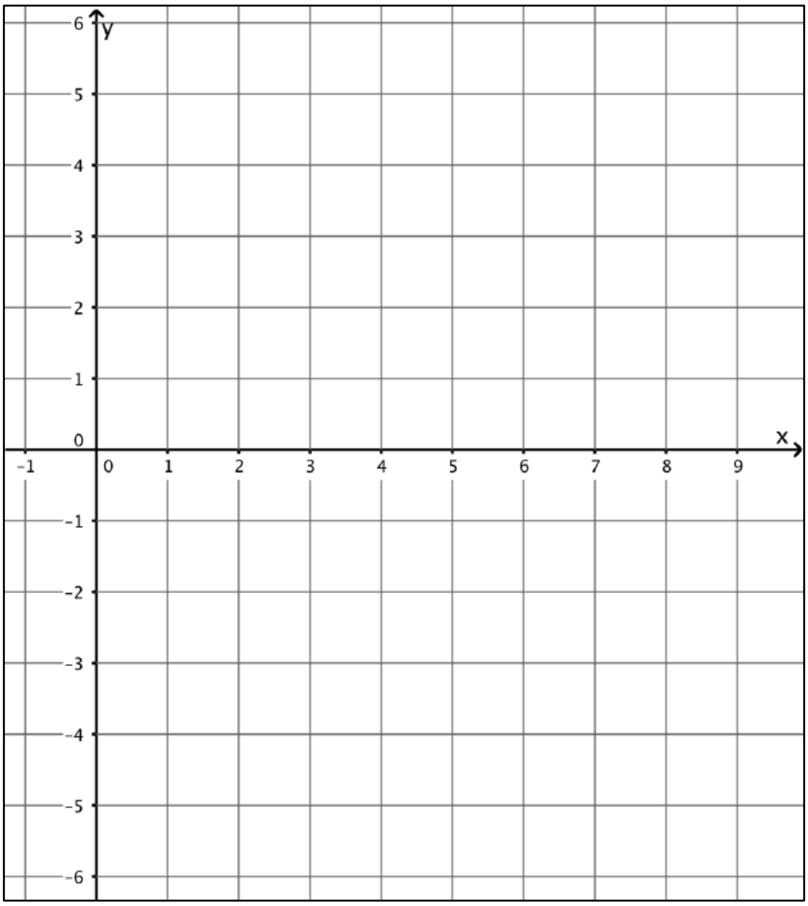
Symétrie axiale d'axe « x » : f(x) → - f(x)

Approche algébrique :



La notation $f(x) \rightarrow -f(x)$ signifie que nous prenons **l'opposé** des images de la fonction f(x) :

Représente les graphiques des fonctions $f(x) = \sqrt{x}$ et $-f(x) = -\sqrt{x}$.



Pour comprendre pourquoi cette transformation de fonction entraîne une symétrie axiale d'axe « y », regardons le tableau de valeurs de la fonction $f(x)$:

x	-3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	$f(-3)$	$f(-2)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$
-$f(x)$	-f(-3)	-f(-2)	-f(-1)	-f(0)	-f(1)	-f(2)	-f(3)

On peut comprendre cette transformation assez facilement. Le fait de prendre l'opposé de l'expression de la fonction modifie l'ordonnée y de chacun des points de la courbe. Ainsi, la courbe représentative de **$-f(x)$** peut être obtenue en **réalisant une symétrie d'axe « x » de la courbe représentative de $f(x)$**.

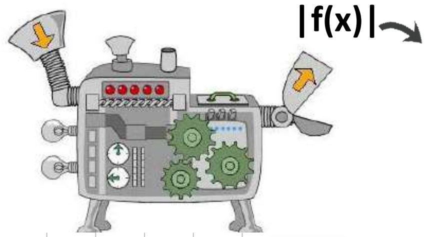
Approche graphique :

Pour construire le graphique de la fonctions $-f(x)$, il faut construire le symétrique de chaque point du graphique de la fonction f par rapport à l'axe x.

> Le graphique de la fonction $-f(x)$ est obtenu à partir du graphique de la fonction $f(x)$ par la ***symétrie d'axe x***

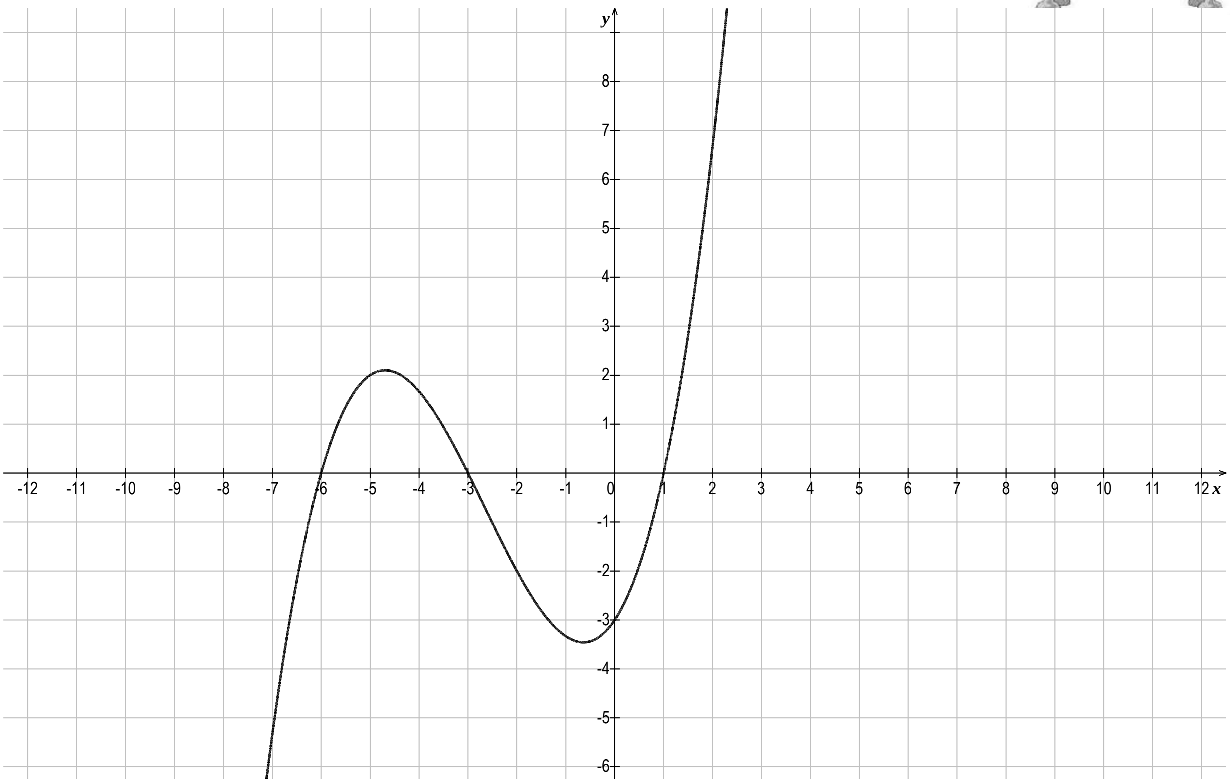
Symétrie axiale d'axe x des images négatives de f(x) » : f(x) → |f(x)|

Approche algébrique :



La notation $\boldsymbol{f(x) \rightarrow |f(x)|}$ signifie que nous prenons **la valeur absolue** des images de la fonction f(x) :

Voici le graphique d'une fonction appelée $f(x)$. Construis le graphique de la fonction $|f(x)|$



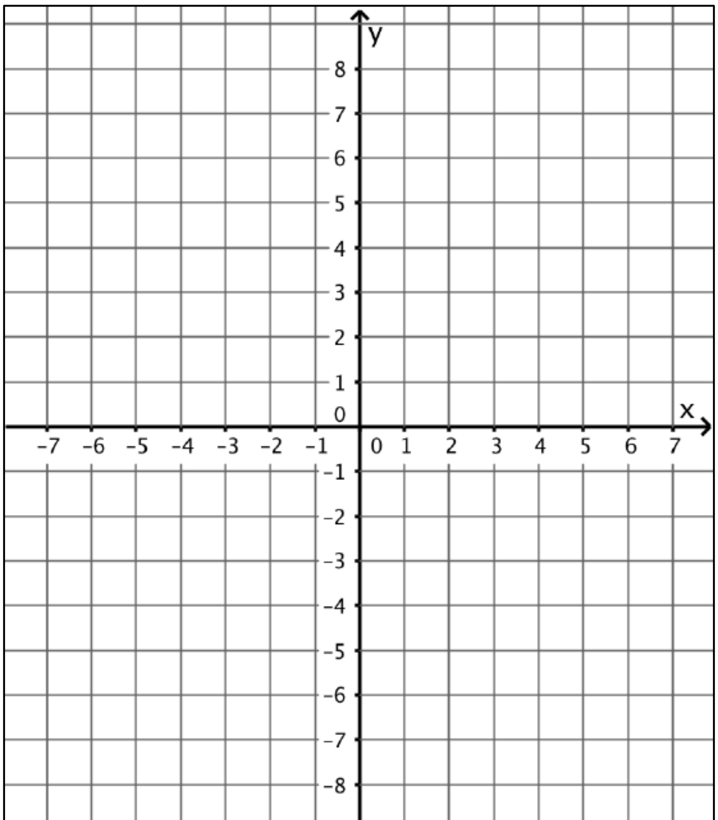
Représente le graphique des fonctions suivantes en t'aidant du tableau de valeurs ci-dessous.

$f(x) = x^3$

$\boldsymbol{x}$	-2	-1	0	1	2
$\boldsymbol{f(x)}$					

$g(x) = |x^3|$

$\boldsymbol{x}$	-2	-1	0	1	2
$\boldsymbol{g(x)}$					

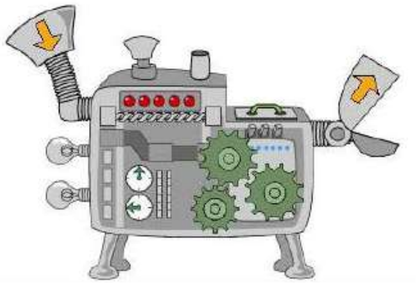
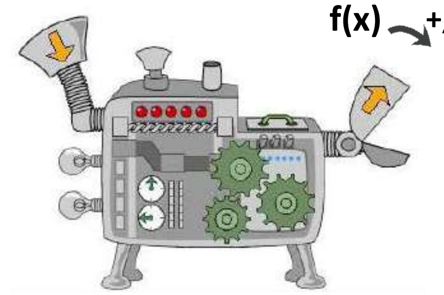


Approche graphique :

Pour construire le graphique de la fonctions $|f(x)|$, il faut construire le symétrique par rapport à l'axe x de chaque point ***<u>d'ordonnée négative</u>*** du graphique de la fonction f.

Le graphique de la fonction $|f(x)|$ est obtenu à partir du graphique de la fonction $f(x)$ par la ***<u>symétrie d'axe x de tous les points d'ordonnée négative.</u>***

6. SYNTHESE

Opérations sur les « x » **→ opération « inverse »**	**Opérations sur les « y »** **→ « même » opération**
x **+, -, x, : par k** 	**f(x)** **+, -, x, : par k** 
f(x + k) → translation horizontale vers la gauche de k unités : on retire k à toutes les abscisses. ***f(x - k)*** → translation horizontale vers la droite de k unités : on ajoute k à toutes les abscisses. ***f(k.x)*** → compression horizontale : on divise toutes les abscisses par k. ***f($\frac{x}{k}$)*** → étirement horizontal : on multiplie toutes les abscisses par k. ***f(-x)*** → symétrie orthogonale d'axe y : on prend l'opposé de toutes les abscisses	***f(x) + k*** → translation verticale vers le haut de k unités : on ajoute k à toutes les ordonnées ***f(x) - k*** → translation verticale vers le bas de k unités : on retire k à toutes les ordonnées ***k.f(x)*** → étirement vertical : on multiplie toutes les ordonnées par k. $\frac{f(x)}{k}$ → compression verticale : on divise toutes les ordonnées par k ***-f(x)*** → symétrie orthogonale d'axe x : on prend l'opposé de toutes les ordonnées
|f(x)| → symétrie orthogonale d'axe x pour tous les points d'ordonnée négatives.	

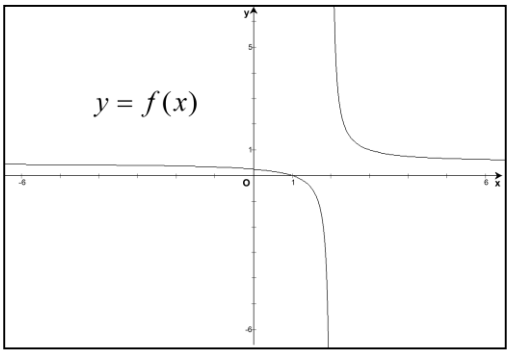
7. EXERCICES

Exercice 14

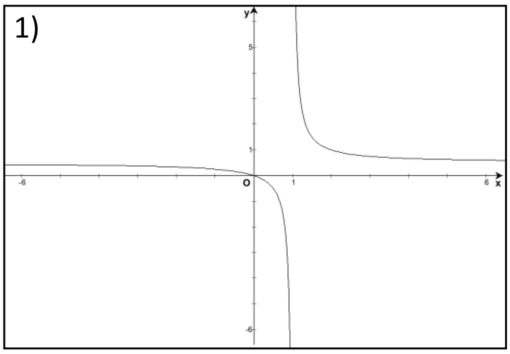
Voici le graphique d'une fonction f ainsi que celui des fonctions suivantes :

$$-f(x)\ ;\ |f(x)|\ ;\ f(x+1)\ ;\ f(x)+1\ ;\ f(-x)\ ;\ 2f(x)\ ;\ f(2x)$$

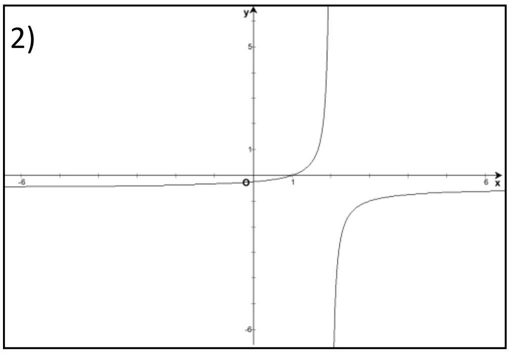
Retrouve parmi les graphiques proposés celui de chacune d'entre elles.



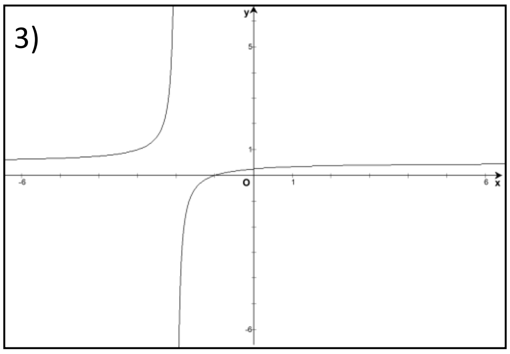
1)



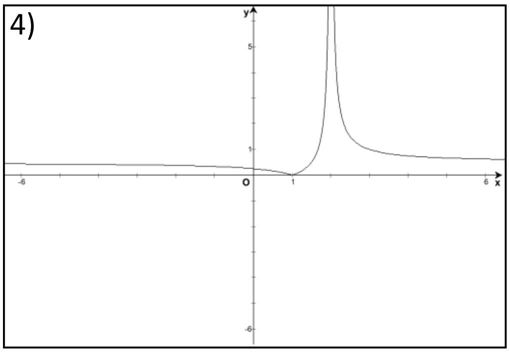
2)



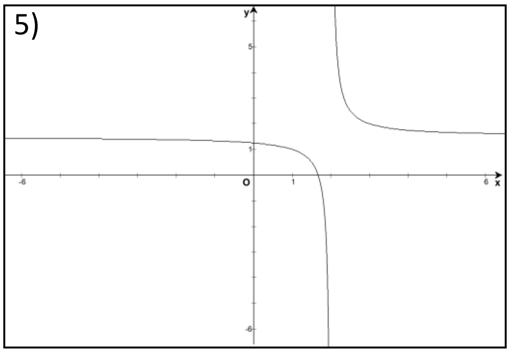
3)



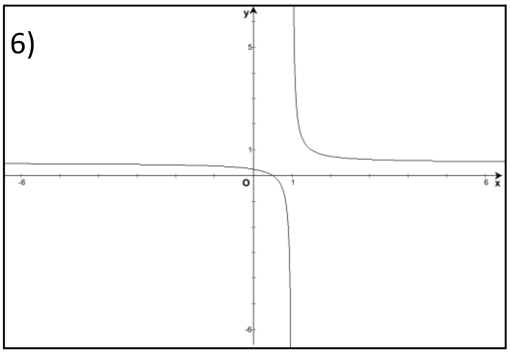
4)



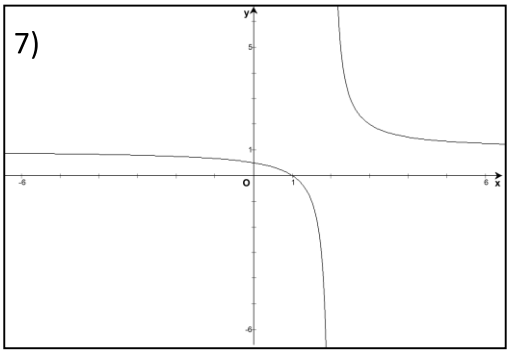
5)



6)



7)



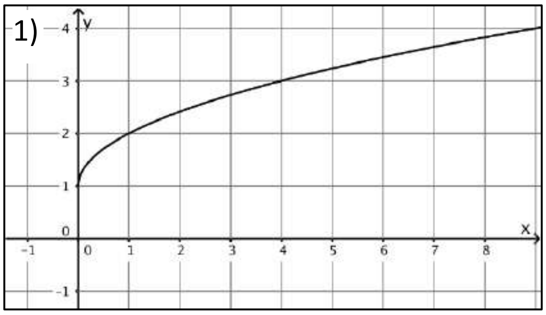
Exercice 15

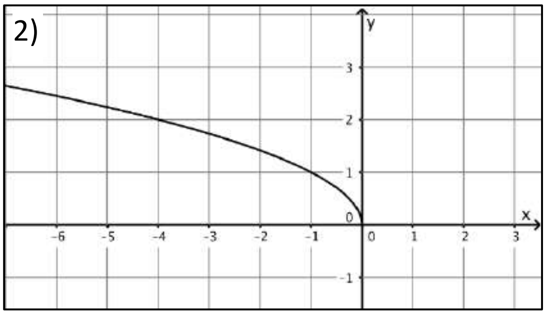
Associe chaque graphique à la fonction qu'il représente.

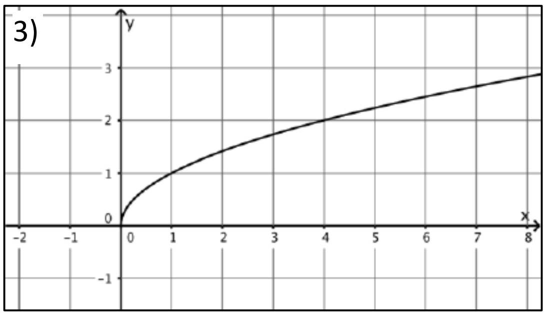
(A) $f(x) = \sqrt{x}$ (D) $f(x) = \sqrt{x} + 1$ (G) $f(x) = \sqrt{2x}$

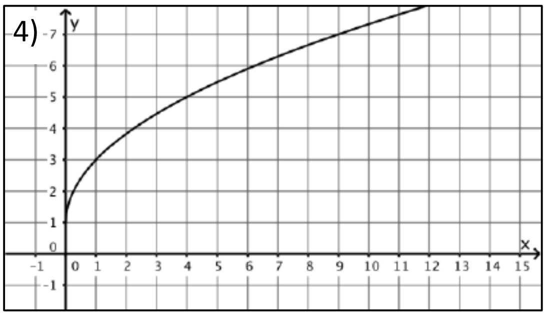
(B) $f(x) = \sqrt{-x}$ (E) $f(x) = 2\sqrt{x}$ (H) $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$

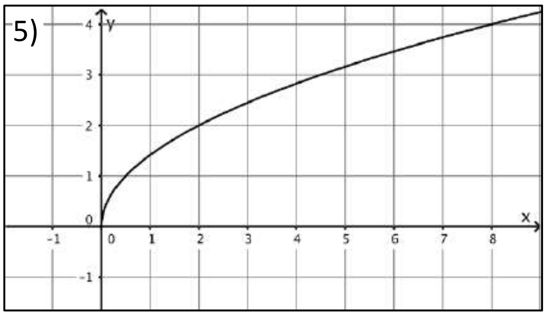
(C) $f(x) = -\sqrt{x}$ (F) $f(x) = \sqrt{x + 1}$

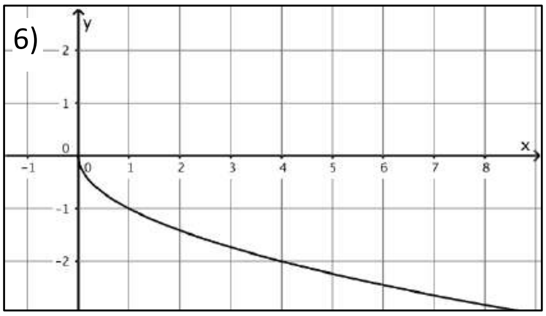


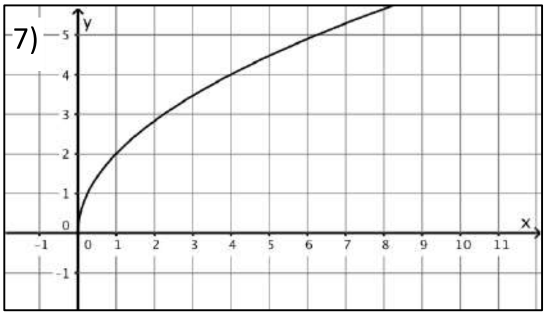


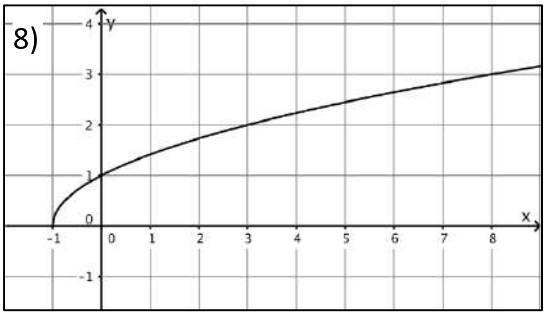












Exercice 16

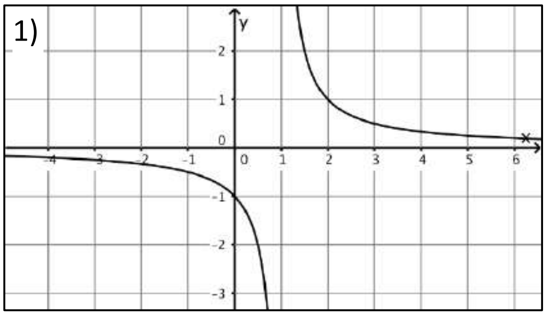
Associe chaque graphique à la fonction qu'il représente.

(A) $f(x) = \frac{1}{x}$ (D) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ (G) $f(x) = \frac{1}{2x}$

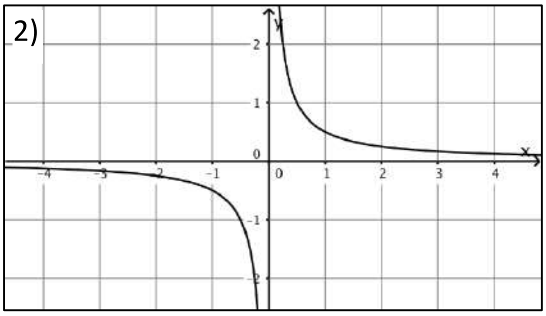
(B) $f(x) = -\frac{1}{x}$ (E) $f(x) = \frac{2}{x}$ (H) $f(x) = \frac{1}{x-2} + 1$

(C) $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ (F) $f(x) = -\frac{1}{x+1}$

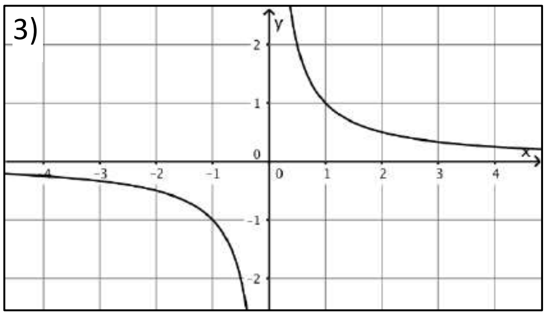
1)



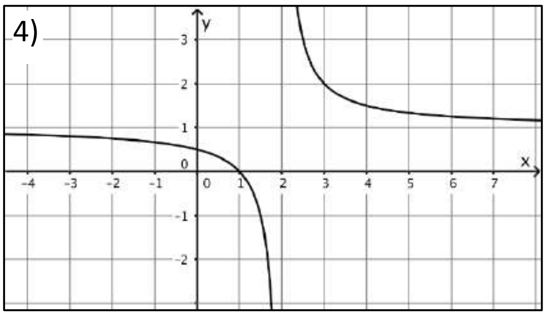
2)



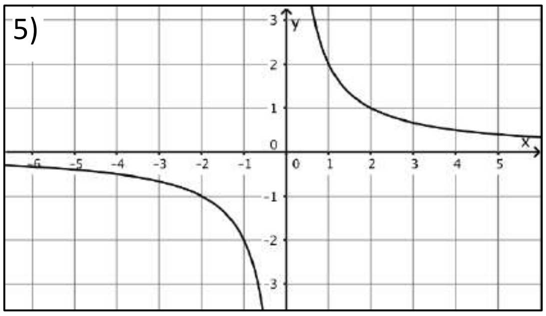
3)



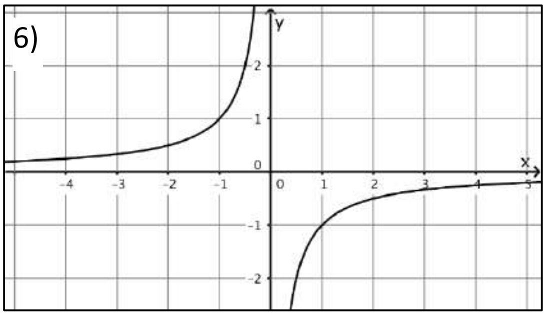
4)



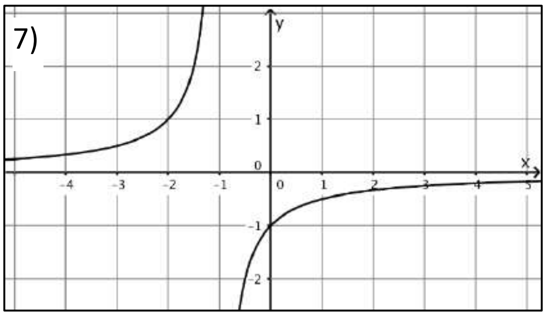
5)



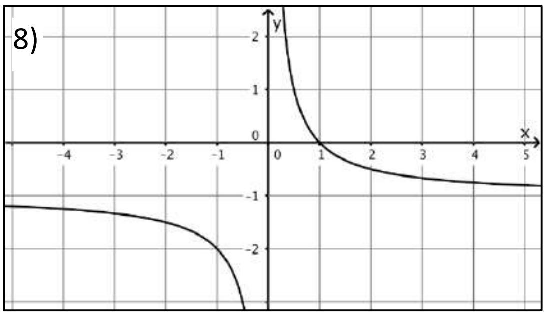
6)



7)



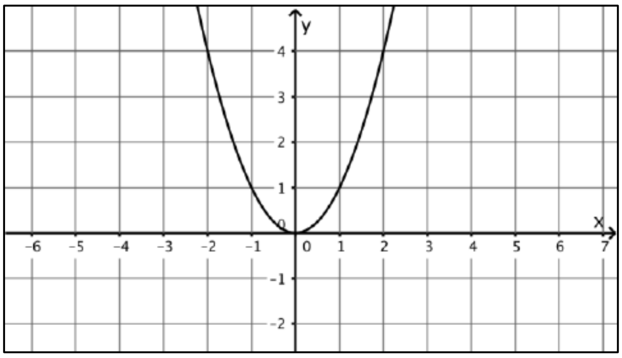
8)



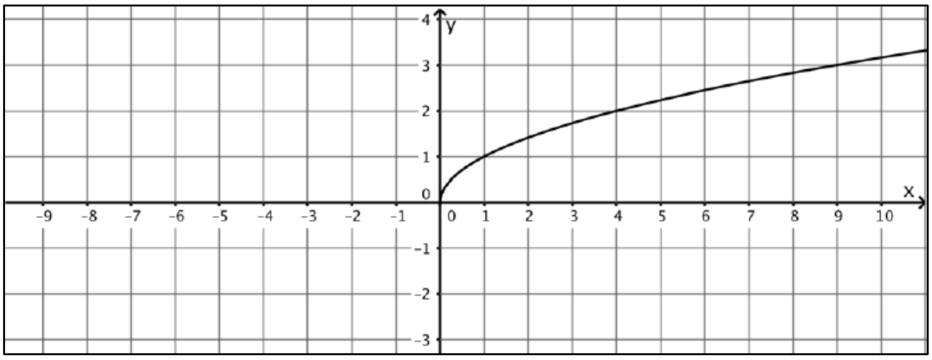
Exercice 17

Représente le graphique des fonctions indiquées au départ de celui de la fonction de référence déjà représentée.

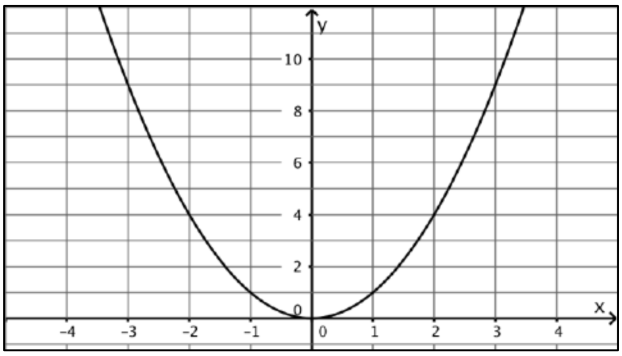
1) $f(x) = x^2 - 2$



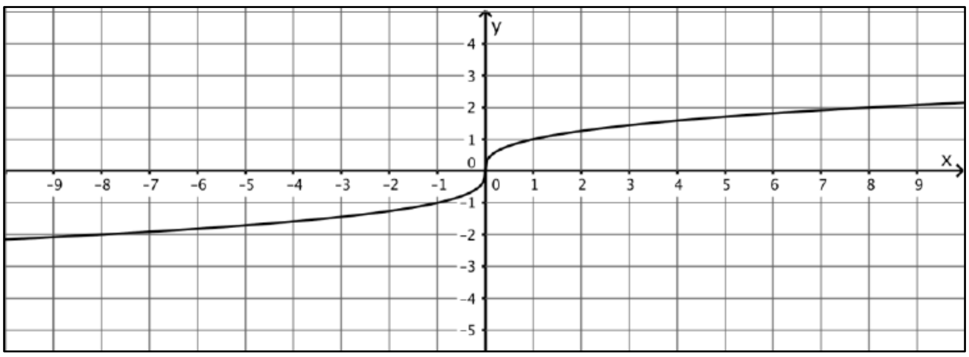
2) $f(x) = -\sqrt{x} + 2$



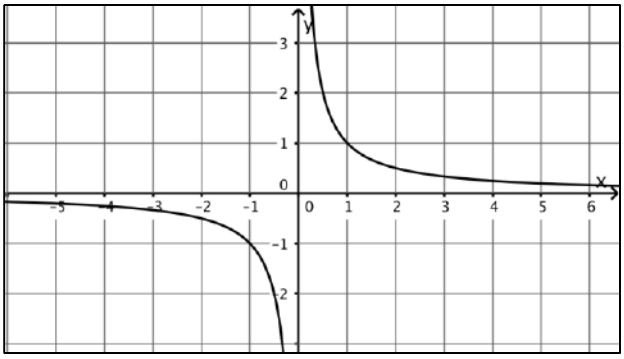
3) $f(x) = 2x^2$



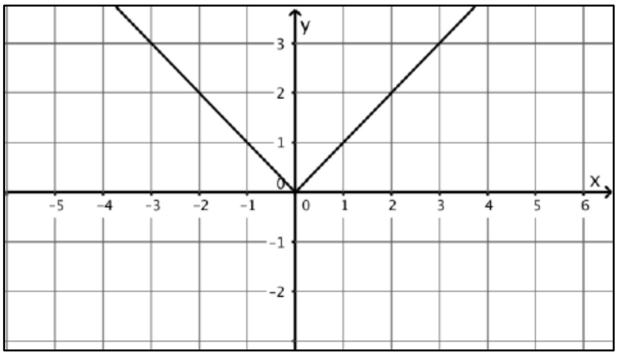
4) $f(x) = 2\sqrt[3]{x} - 1$



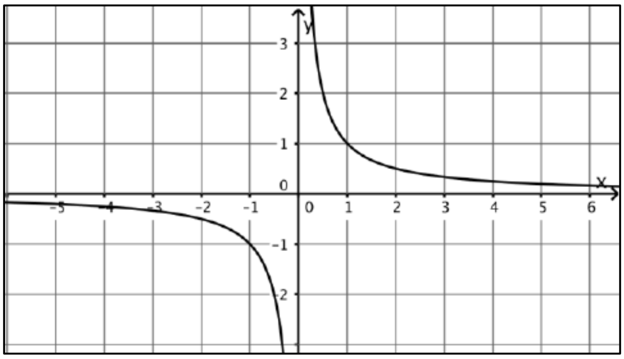
5) $f(x) = \frac{1}{x+1}$



6) $f(x) = |x+2| - 2$



7) $f(x) = \frac{1}{x-2} + 1$



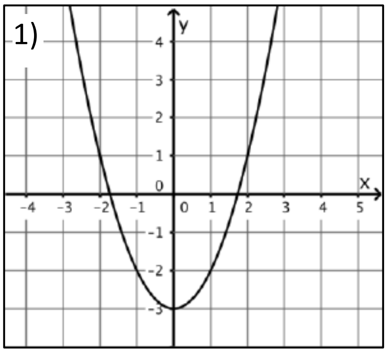
Exercice 18

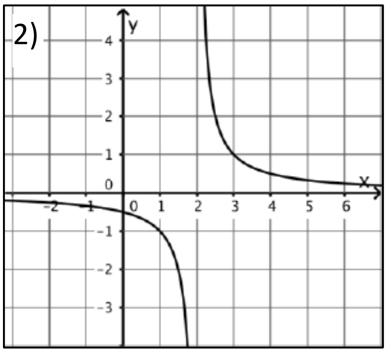
Trace le graphique des fonctions suivantes en appliquant une ou plusieurs transformations du plan à l'une des fonctions de référence.

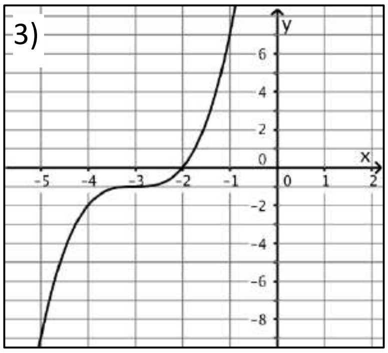
1) $f(x) = (x-2)^2$
2) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{2}$
3) $f(x) = -\sqrt{2x}$
4) $f(x) = (x-3)^3$
5) $f(x) = \sqrt{x-3} + 2$
6) $f(x) = (x+2)^2 + 5$
7) $f(x) = 2\sqrt{x-1} - 3$
8) $f(x) = 2|x| - 1$
9) $f(x) = -\left|\sqrt[3]{x}\right|$
10) $f(x) = \frac{1}{x+1}$
11) $f(x) = |x^2 - 2|$
12) $f(x) = -\frac{1}{x} + 1$

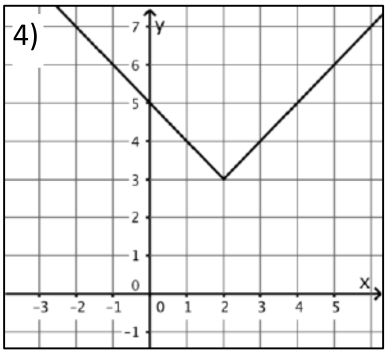
Exercice 19

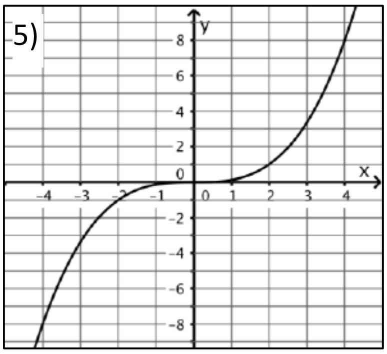
Détermine les expressions analytiques des fonctions dont on donne les graphiques suivants :

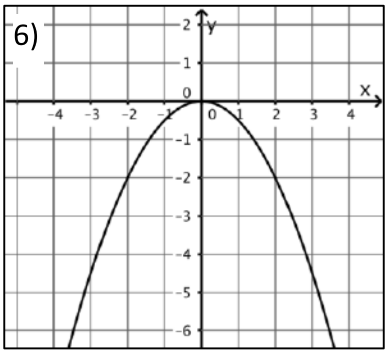
1)


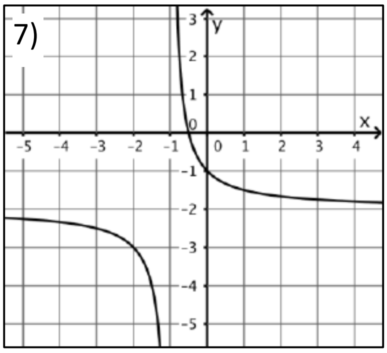
2)


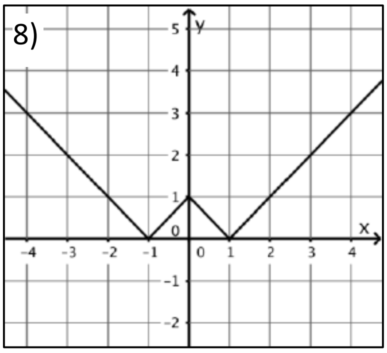
3)


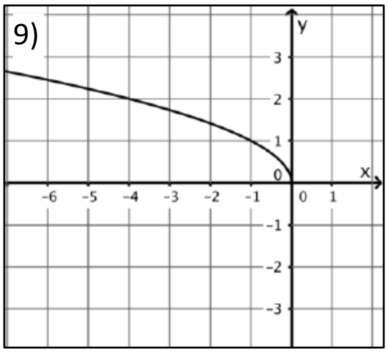
4)


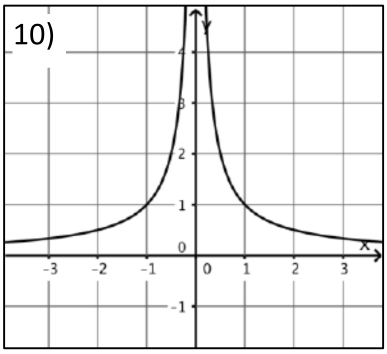
5)


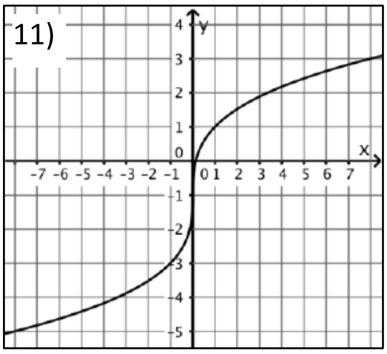
6)


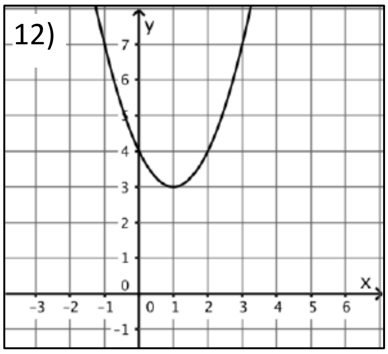
7)


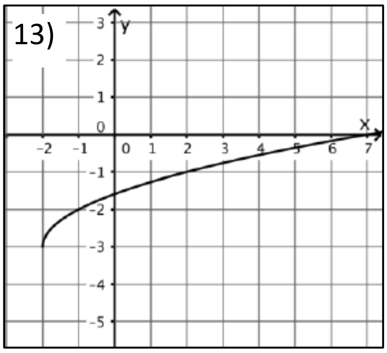
8)


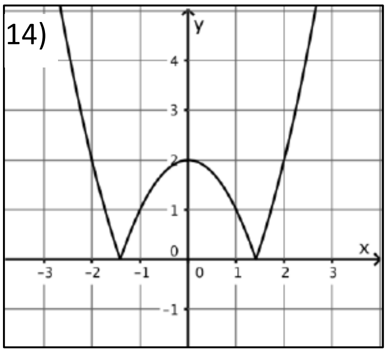
9)


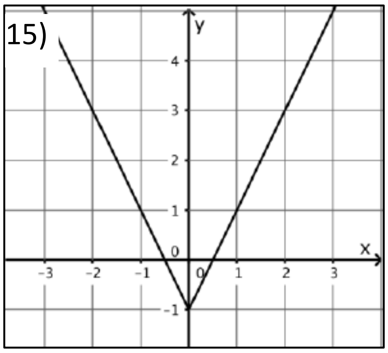
10)


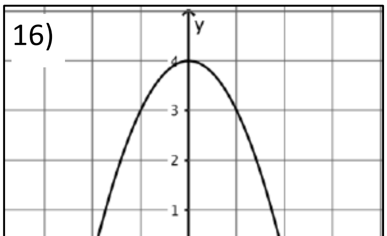
11)


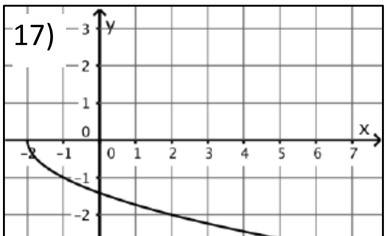
12)


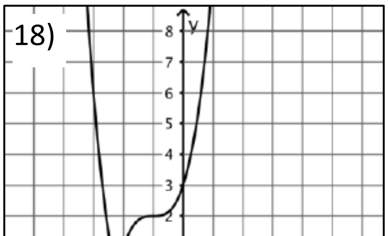
13)


14)


15)


16)


17)


18)


Exercice 20

Représente le graphique d'une fonction

1) paire et qui admet -1 pour zéro.
2) paire et négative.
3) impaire et décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
4) négative et dont le domaine de définition est $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.
5) positive et dont le graphique comprend le point $(-3,2)$.

Exercice 21

La fonction f étant donnée, déduis-en l'information demandée pour la fonction g.

1) $dom\ f = [0,7]$	$g(x) = f(2x)$	$dom\ g = ?$
2) Les zéros de f sont 3 et 4	$g(x) = f(x-3)$	Zéros de g ?
3) $dom\ f = [2,4]$	$g(x) = 2f(x)$	$dom\ g = ?$
4) L'ordonnée à l'origine de f est -2 l'origine	$g(x) = f(x) + 3$	ordonnée à 1. de g ?

Exercice 22

Invente, à partir des fonctions de référence, l'expression analytique d'une fonction

1) dont le domaine est $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et dont l'ensemble image est $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.
2) obtenue à partir de la fonction cube qui est positive pour tout réel.
3) dont le domaine est $\mathbb{R}$ et dont l'ensemble image est $[-2, +\infty[$.

SOLUTIONS DES EXERCICES

Ex 1	a) 1 – 3 – 5 – 6 – 7 – 9			
	b) 1) 1) $\mathrm{dom}\ f = \mathbb{R}$	2) $\mathrm{im}\ f = \mathbb{R}$	3) $x = 1$	4) /
	5) $x = 0$	6) $f(2) = -2$	7) $f(0) = 2$	
	3) 1) $\mathrm{dom}\ f =]-\infty, 2]$	2) $\mathrm{im}\ f =]-\infty, 4]$	3) $x = -2$	4) /
	5) $x = 1$	6) $f(2) = 4$	7) $f(0) = 1{,}2$	

	5) 1) $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}_0$ 2) $\mathrm{im}\, f = \mathbb{R}_0$ 3) / 4) fonction impaire 5) $x = \frac{1}{2}$ 6) $f(2) = \frac{1}{2}$ 7) $f(0) \nexists$ 6) 1) $\mathrm{dom}\, f =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$ 2) $\mathrm{im}\, f = \mathbb{R}^+$ 3) $x = -2\,;\, x = 2$ 4) fonction paire 5) $x = -2{,}7\,;\, x = 2{,}7$ 6) $f(2) = 0$ 7) $f(0) \nexists$ 7) 1) $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}$ 2) $\mathrm{im}\, f = \mathbb{R}^+$ 3) $x = -2\,;\, x = 2$ 4) fonction paire 5) $x = -2{,}4\,;\, x = -1{,}4\,;\, x = 1{,}4\,;\, x = 2{,}4$ 6) $f(2) = 0$ 7) $f(0) = 4$ 9) 1) $\mathrm{dom}\, f =]-2, -1] \cup [0{,}2[$ 2) $\mathrm{im}\, f =]-2, -1] \cup \left\{\frac{3}{2}\right\}$ 3) / 4) / 5) / 6) $f(2) \nexists$ 7) $f(0) = \frac{3}{2}$
Ex 2	1) $]-1{,}2]$ 2) $\mathbb{R}$ 3) $\mathbb{R}^+$ 4) $[-2{,}4] \setminus \{1\}$ 5) $[0{,}1[$ 6) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
Ex 3	1) 2) deux solutions : $S = \{2{,}5\}$ 3)
Ex 4	
Ex 5	
Ex 6	
Ex 7	
Ex 8	
Ex 9	
Ex 10	
Ex 11	
Ex 12	
Ex 13	
Ex 14	
Ex 15	
Ex 16	
Ex 17	
Ex 18	
Ex 19	1) $f(x) = x^2 - 3$ 2) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ 3) $f(x) = (x+3)^3 - 1$ 4) $f(x) = \lvert x-2 \rvert + 3$ 5) $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^3$ 6) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ 7) $f(x) = \frac{1}{x+1} - 2$ 8) $f(x) = \big\lvert \lvert x \rvert - 1 \big\rvert$ 9) $f(x) = \sqrt{-x}$ 10) $f(x) = \left\lvert \frac{1}{x} \right\rvert$ 11) $f(x) = 2\sqrt[3]{x} - 1$ 12) $f(x) = (x-1)^2 + 3$ 13) $f(x) = \sqrt{x+2} - 3$ 14) $f(x) = \lvert x^2 - 2 \rvert$ 15) $f(x) = 2\lvert x \rvert - 1$ 16) $f(x) = -x^2 + 4$ 17) $f(x) = -\sqrt{x+2}$ 18) $f(x) = \lvert (x+1)^3 + 2 \rvert$
Ex 20	
Ex 21	
Ex 22	