Collège Saint-Barthélemy
Y. Michiels

Mathématique – Troisième année

5

UAA5 – Outils Algèbriques

Excusez-moi, mademoiselle ! Mais hier, vous m'avez dit que ***x*** valait ***deux...***

Equations

Inéquations

OBJECTIFS – UAA5 : Les outils algébriques

Connaitre

- *Interpréter et vérifier les solutions d'une équation, d'inéquation du premier degré.*
- *Justifier les différentes étapes d'une résolution d'équation ou d'inéquation en évoquant les principes d'équivalence.*

Appliquer

- *Résoudre une équation, une inéquation du premier degré à une inconnue.*
- *Utiliser la règle du produit nul pour résoudre certaines équations du deuxième degré.*
- *Résoudre une équation contenant des fractions rationnelles.*
- *Utiliser les propriétés des proportions pour résoudre une équation du premier degré.*
- *Modifier la forme d'une expression algébrique dans le but de résoudre une équation.*

Transférer

- *Résoudre des problèmes mettant en jeu une équation ou une inéquation du premier degré.*

EXPLORATION I : NOMBRE DE SOLUTIONS

1. Sans résoudre complètement les équations ci-dessous, note le nombre de solutions qu'elles admettent.

- $x = 2$
- $0.x = 0$
- $5(x - 3) = 0$
- $6x = 0$
- $0x = -7$
- $7x = 7$
- $2x + x + 5 = 3x - 4$
- $3(x + 1) = 0$
- $4x - 2 = 9$
- $x + 3 = x + 5$
- $3x + 1 = 0$
- $4x + 5 = 3x + x - 1 + 6$
- $5x = 7x - 2x$

2. Ecris deux équations du premier degré à une inconnue dont la solution est :

- 0
- -3
- 8
- $1,4$
- $\frac{5}{9}$

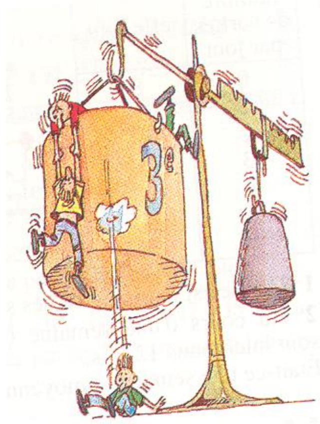
3. Ecris une équation dont tous les nombres ci-dessus sont solutions.

EXPLORATION II : RETOUR AUX EQUATIONS

1. Parmi les nombres ci-dessous, quels sont ceux qui sont solutions de l'équation :

$$x^2 - 3x = 2 - 4x$$

0 1 -1 2 -2 3 -3



2. Complète le tableau suivant :

- en barrant les nombres de la 2ème colonne qui ne sont pas solution de l'équation donnée dans la 1ère colonne ;
- en écrivant dans la 3ème colonne ***toutes les solutions*** de cette équation

Equations	Nombres proposés comme solutions					Toutes les solutions sont…
$x.(x-1) = 0$	-2	-1	0	2	4	
$(x-7).(x+4) = 0$	-7	-4	0	3	4	
$(3x+1).(x-2) = 0$	-2	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	2	
$x^2 - 9 = 0$	-2	-1	0	3	9	
$x^2 + 1 = 0$	-2	-1	0	1	2	
$2x^2 - 5x = 0$	$-\frac{5}{2}$	-1	0	1	$\frac{5}{2}$	
$x^2 - 4 = 3(2-x)$	-5	-1	0	1	3	
$x^3 + 4x = 4x^2$	0	1	2	3	4	
$2x^3 + x^2 - 8x - 4 = 0$	-3	-2	-1	0	1	

3. Solutions ou non ? Sans résoudre complètement les équations ci-dessous, note le nombre de solutions qu'elles admettent.

- $x(2 - x) = 1$
- $x(2 - x) = 0$
- $-3x + 7 = 4(x - 5) + (-7x)$
- $-3x + 9 = -2.(6 - x)$
- $x^2 = 36$
- $x^2 = 0$
- $x^2 = -25$
- $(x + 2)^2 = 0$
- $3x^2 = 0$

4. Ecris une équation qui :

- admet 1 et 3 comme seules solutions ;
- admet 1 et 3 comme solutions ;
- admet une infinité de solutions
- admet pour ensemble de solutions **S = {0 ; 2 ; -3}**
- n'admet pas de solution ;
- admet exactement deux solutions distinctes ;
- admet -5 comme solution.

5. Pour chaque équation, réponds aux 3 questions ci-dessous en justifiant :

- ***Admet-elle « -2 » comme solution ?***
- ***Admet-elle « -2 » comme unique solution ?***
- ***Admet-elle « 0 » comme solution ?***

- $x^2 - 4 = 0$
- $0x = 0$
- $2x = 0$
- $3x + 6 = 0$
- $3x - 5 = 2x - 7$
- $x - 2 = 0$
- $x^2 = x^2$

6. Des équations aux fractions algébriques. Complète le tableau suivant :

	Ecriture somme	*Ecriture produit*	*Valeur de x pour lesquelles P(x) = 0*
$P_1(x)$	$x^2 - 6x + 9$		
$P_2(x)$		$(x + 3)(x - 3)$	
$P_3(x)$	$9x^2 + 12x + 4$		
$P_4(x)$		$(3x + 2)(3x - 2)$	
$P_5(x)$	$-4x^2 - 6x - 2$		
$P_6(x)$		$-2(2x + 1)(x + 1)$	
$P_7(x)$	$16 - x^2$		
$P_8(x)$		$(x - 4)(x + 1)$	
$P_9(x)$	$2x^2 - 19x + 35$		
$P_{10}(x)$		$(x - 7)(x - 2)$	

7. Pour quelles valeurs de « x » les fractions suivantes ne sont-elles pas des nombres réels ?

$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} =$

$\frac{P_7(x)}{P_8(x)} =$

$\frac{P_3(x)}{P_4(x)} =$

$\frac{P_9(x)}{P_{10}(x)} =$

$\frac{P_5(x)}{P_6(x)} =$

8. Simplifie les fractions suivantes :

$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} =$

$\frac{P_3(x)}{P_4(x)} =$

$\frac{P_5(x)}{P_6(x)} =$

$\frac{P_7(x)}{P_8(x)} =$

$\frac{P_9(x)}{P_{10}(x)} =$

9. Complète par ***Vrai*** ou ***Faux***. Justifie dans chaque cas.

a] L'équation $2x(2x - 1) = 0$ admet deux solutions différentes

b] L'équation $(3x - 2)(\frac{2}{3} - x) = 0$ admet finalement une seule solution.

c] L'équation $x(x^2 - 1) = 0$ a pour solutions trois nombres entiers consécutifs.

d] 2 et $\frac{5}{2}$ sont les solutions de l'équation $(2 - x)(5x - 2) = 0$

10. Invente une équation qui vérifie la ou les condition(s) indiquée(s) ci-dessous :

- ✓ Les solutions sont : -2 et 3
- ✓ Les solutions sont : 2 ; -2 et 0.
- ✓ Les solutions sont : $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$
- ✓ Les solutions sont opposées.
- ✓ Les solutions sont 5/4 et -3/2.
- ✓ Les solutions sont -2 et 2/3.

11. Pour l'exercice 4, quand cela est possible, invente 2 autres équations qui vérifient la même condition.

🕮 *Théorie sur les équations produits*

EXPLORATION III : LES INEQUATIONS

1. Introduction

Un marchand vend des sweat-shirts à 20€ et des tee-shirts à 11€. S'il vend « x » sweat-shirts et « y » tee-shirts, traduis les différentes situations à l'aide d'une expression mathématique :

- Il espère vendre en tout plus de 150 articles : ....
- Il espère vendre pour plus de 600€ de marchandises : ....
- Il espère vendre trois fois plus de sweats que de tee-shirts : ....

2. Principes d'équivalences

Pour résoudre l'équation suivante, tu as appris en deuxième année à appliquer des principes d'équivalences pour passer d'une ligne à une autre (⇳) :

$$3x - 4 = 5x + 2$$

⇳ ajouter 4 aux deux membres de l'équation

$$3x = 5x + 2 + 4$$

⇳ retrancher 5x aux deux membres de l'équation

$$3x - 5x = 2 + 4$$

⇳

$$-2x = 6$$

⇳ diviser par (-2) les deux membres de l'équation

$$x = -3$$

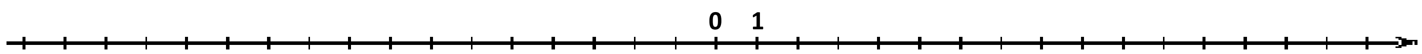
Ces principes sont-ils toujours valables dans les inéquations ?

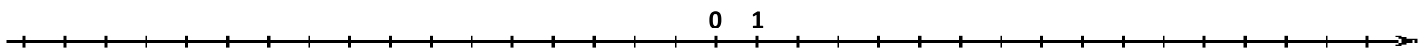
3.

Choisis trois nombres auxquels tu associes respectivement les lettres a ; b ; c. Place chaque fois ces nombres sur la droite graduée représentée. Puis effectue les opérations demandées :

a) <u>Ajouter un même nombre (ex. : « +3 »)</u>

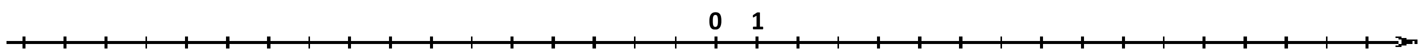
$x - 3 < 7$ ⇔ x ..... 7 + 3

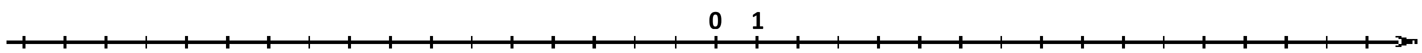




b) <u>Retrancher un même nombre (ex. : « -3 »)</u>

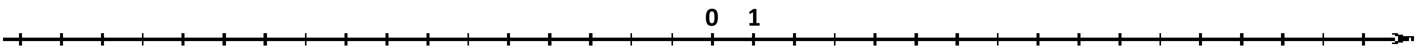
$x + 3 < 7$ ⇔ x ..... 7 – 3

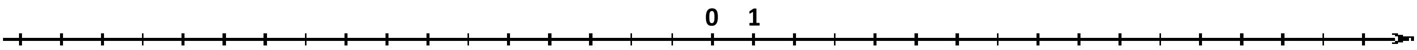




c) <u>Multiplier par un même nombre strictement positif (Ex. : « .3 »)</u>

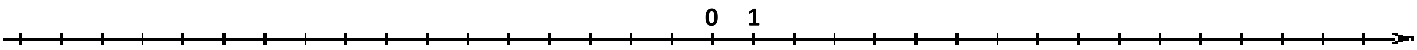
$$\frac{x}{3} < 7 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \;.....\; 7 \cdot 3$$

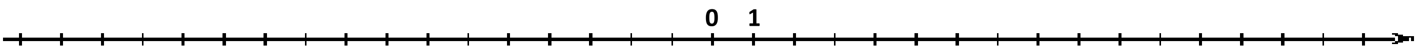




d) <u>Multiplier par un même nombre strictement négatif (Ex . : « .(-3) »)</u>

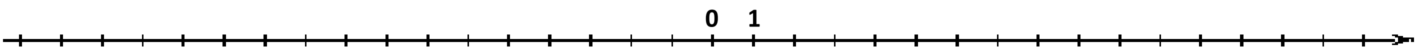
$$\frac{x}{-3} < 7 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \;.....\; 7 \cdot (-3)$$

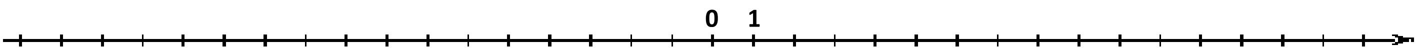




e) <u>Diviser par un même nombre strictement positif (Ex . : « : 3 »)</u>

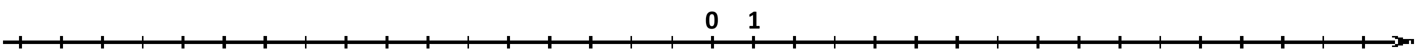
$$3x < 7 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \;.....\; \frac{7}{3}$$

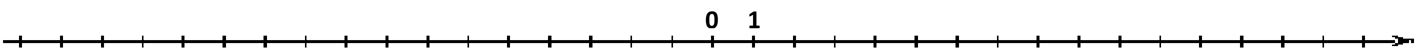




f) <u>Diviser par un même nombre strictement négatif (Ex . : « : (-3) »)</u>

$$-3x < 7 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \;.....\; \frac{7}{-3}$$





Correction : regarder la vidéo https://youtu.be/KZ0w3WutWCM

4. Voici dix nombres :

-3	**-8/3**	**-0,5**	**0**	**1**	**2**	**2,5**	**10/3**	**19/3**	**17/4**

a) Quels sont ceux dont le double est plus petit que 4 ?

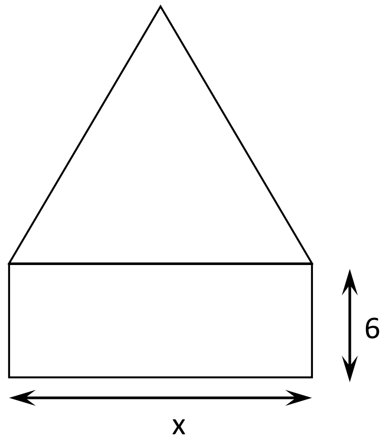
b) Quels sont ceux dont le triple est plus grand que 6 ?

c) Par quels nombres de ce tableau peux-tu remplacer ***x*** de façon que l'inégalité $2x - 4 < 0$ soit vraie ?

d) Même question avec l'inégalité $-3x + 6 < 0$.

L'intervalle noté :	est l'ensemble des réels x tels que :	Représentation (en rouge) :
$[a;b]$	$a \leq x \leq b$	
$[a;b[$	$a \leq x < b$	
$]a;b]$	$a < x \leq b$	
$]a;b[$	$a < x < b$	

5. Pour quelles valeurs de ***x*** le périmètre du rectangle est-il plus grand que celui du triangle équilatéral ? Colorie en vert sur une droite graduée la partie qui correspond aux nombres trouvés.



Ensemble des solutions :
https://www.geogebra.org/m/vjSqFCwG#material/yDcKHC6D

6. Le propriétaire d'un terrain reçoit une note de sa commune l'avertissant que des modifications vont être apportées à sa propriété, à cause de la construction d'une route. Le terrain, préalablement rectangulaire verra une de ses dimensions x augmenté de 5m et l'autre y diminué de 3m. A la réception de cette lettre, le propriétaire se réjouit que l'aire de son terrain soit augmentée par cette expropriation.
Quelle condition doit vérifier x et y pour qu'il en soit ainsi ?

🕮 *Théorie sur les inéquations*

SYNTHESE : EQUATIONS – INEQUATIONS

1. RAPPEL SUR : EGALITES - PRINCIPES D'EQUIVALENCE - EQUATIONS

1.1. Egalité

1] Le signe « = » placé entre deux expressions différentes signifie que ces deux expressions représentent le même nombre.

2] Nous appellerons « **égalité** » l'écriture formée par ces deux expressions et le signe **=** qui les unit.

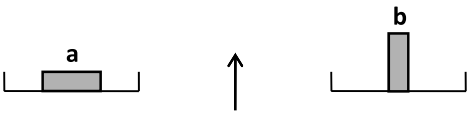
ex : $16 + 4 = 17 + 3$

3] Dans cette égalité, $16 + 4$ représente le **premier membre** de l'égalité
$17 + 3$ représente le **deuxième membre** de l'égalité.

Une bonne représentation de l'égalité est la balance de Roberval équilibrée.

1.2. Les principes d'équivalence

Soit la balance équilibrée par deux masses quelconques **a** et **b**.



1] Pour l'addition

Si on ajoute un même nombre aux deux membres d'une égalité, on conserve une égalité. $\forall$ a, b, c $\in$ R : $\mathbf{a = b \Rightarrow a + c = b + c}$

2] Pour la soustraction

Si on soustrait un même nombre aux deux membres d'une égalité, on conserve une égalité. $\forall$ a, b, c $\in$ R : $\mathbf{a = b \Rightarrow a - c = b - c}$

3] Pour la multiplication

Si on multiplie les deux membres d'une égalité par un même facteur, on conserve une égalité. $\forall$ a, b, c $\in$ R : $\mathbf{a = b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c}$

4] Pour la division

Si on divise les deux membres d'une égalité par un même nombre **différent de zéro**, on conserve une égalité. $\forall$ a, b $\in$ R; $\forall$ c $\in$ R_0 : $\mathbf{a = b \Rightarrow a : c = b : c}$

1.3. Equations

1. Une **équation** est une **égalité** qui renferme au moins une **inconnue**.
2. **Résoudre** une équation c'est trouver toutes les **valeurs de l'inconnue** qui vérifie l'égalité. Ces valeurs sont appelées **solutions** de l'équation

2. EQUATIONS DU PREMIER DEGRE A UNE INCONNUE

2.1. Notion

Les équations que tu as rencontré en deuxième étaient toutes du ***premier degré***, car dans chacune d'elles, le degré le plus élevé de l'inconnue (« x » le plus souvent) était 1.

Exemples :

$x + 14 = -30$	$4x + 5 = 2x + 7$	$-27 = 3x$
$3x = 51$	$7x = 0$	$0x = -6$
$\frac{x}{8} = -32$	$\frac{3-2x}{5} - \frac{2(x+1)}{3} = x - \frac{2x-5}{15}$	$0x = 0$

Par contre, l'équation :

$$x^2 - 4 = 0$$

n'est pas du premier degré puisque « x » apparaît à la puissance 2. De même, l'équation :

$$(x + 2)(2x - 4) = 0$$

n'est pas du premier degré puisque « x » apparaît à la puissance 2 après distributivité.

2.2. Résolution

Pour résoudre de telles équations, ce que tu as déjà fait en deuxième :

- ✓ Tu transformes l'équation de départ en des équations équivalentes de plus en plus simples, en utilisant les principes d'équivalences.
- ✓ l'équation est résolue quand tu as obtenu une équation dont le premier membre est l'inconnue et le second membre un nombre (ou l'inverse).

Méthode 1 :

$$\frac{3-2x}{5} - \frac{2(x+1)}{3} = x - \frac{2x-5}{15}$$

Distributivité

$$\Leftrightarrow \frac{3-2x}{5} - \frac{2x+2}{3} = x - \frac{2x-5}{15}$$

Principe de multiplication pour éliminer les dénos : multiplier les 2 membres de l'équation par 15

$$\Leftrightarrow 15.\left(\frac{3-2x}{5} - \frac{2x+2}{3}\right) = \left(x - \frac{2x-5}{15}\right).15$$

Distribuer « 15 » et simplifier

$$\Leftrightarrow 3.(3-2x) - 5.(2x+2) = 15x - (2x-5)$$

Distributivité

$$\Leftrightarrow 9 - 6x - 10x - 10 = 15x - 2x + 5$$

$$\Leftrightarrow -1 - 16x = 13x + 5$$

Principe d'addition (+ 1 aux 2 membres)
Principe de soustraction (- 13x aux 2 membres)

$$\Leftrightarrow -29x = 6$$

Principe de division (: (-29) les 2 membres)

$$\Leftrightarrow x = \frac{-6}{29}$$

$$S = \{\frac{-6}{29}\}$$

<u>Méthode 2</u> :

$$\frac{3-2x}{5}-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{x+1}{2}\right)=x-\frac{-2x-5}{15}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-2x}{5}-\frac{2x+2}{6}=x-\frac{-2x-5}{15}$$

$$\Leftrightarrow \frac{18-12x}{30}-\frac{10x+10}{30}=\frac{30x}{30}-\frac{-4x-10}{30}$$

$$\Leftrightarrow 18-12x-10x-10=30x+4x+10$$

$$\Leftrightarrow -12x-10x-30x-4x=10-18+10$$

$$\Leftrightarrow -56x=2$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-2}{56}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-1}{28} \qquad S=\{\frac{-1}{28}\}$$

<u>2.3.</u> <u>Trois fautes « habituelles » à éviter…</u>

1. *D'abord distribuer avant de réduire au même dénominateur :*

$$\frac{3-2x}{5}-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{x+1}{2}\right)=x-\frac{-2x-5}{15}$$

$$\frac{18-12x}{30}-\frac{20}{30}\cdot\left(\frac{15x+15}{30}\right)=\frac{30x}{30}-\frac{-4x-10}{30}$$

Le 2ème terme est en 900ième et pas en 30ième !

2. *Bien TOUT mettre au même dénominateur avant de le « neutraliser » :*

$$\frac{2x-1}{3}-\frac{x}{2}=5$$

Seul le 1er membre de l'équation a été multiplié par 6 pour « neutraliser » le dénominateur ! Il n'y a plus équivalence !

$$\Leftrightarrow \frac{4x-2}{6}-\frac{3x}{6}=5$$

Le 2ème membre devrait être : $\frac{30}{6}$

$$4x-2-3x=5$$

Et il doit être égal à « 30 » après la « neutralisation » du dénominateur.

3. *Faire particulièrement attention au signe* ***<u>« moins » qui se trouve devant une fraction</u>*** *dont le numérateur comporte plusieurs termes :*

$$\frac{18-12x}{30}-\frac{10x+10}{30}=\frac{30x}{30}-\frac{-4x-10}{30}$$

$$\Leftrightarrow 18-12x-10x-10=30x+4x+10$$

$\Leftrightarrow$ …

2.4. Nombres de solutions et équations particulières

Une équation du premier degré aura dans la plupart des cas ***une seule solution***.

Mais deux autres cas de figure peuvent se présenter. En effet, certaines équations qui semblent être du premier degré ne le sont pas quand à la fin de la résolution tu trouves une égalité du type :

$$0.x = a \text{ (un nombre quelconque)}$$

✓ Premier cas : « a » = 0

Tu obtiens l'égalité suivante :

$$\mathbf{0 . x = 0}$$

Cette égalité est vraie pour toutes les valeurs de *x* et tout nombre est solution de l'équation ; elle est ***indéterminée***.

Equation indéterminée : S = R

✓ Deuxième cas : « a » $\neq$ 0

Tu obtiens une égalité du type :

$$\mathbf{0 . x = -3} \text{ (ou tout autre nombre réel sauf 0)}$$

Cette égalité est fausse pour toutes les valeurs de *x* et l'équation n'admet aucune solution; elle est ***impossible***.

Equation impossible : S = { } ou S = $\varnothing$

2.5. Exercices

Série 1

1] $6(x + 5) - 5x = 25$ **S = {-5}**

2] $4(4 + 2x) = 60 - 3x$ **S = {4}**

3] $60x + 1 = 3(3 + 4x)$ **S = {$\frac{1}{6}$}**

4] $3x - 5 = 7(x - 1) - 6$ **S = {2}**

5] $\frac{2x-3}{5}+\frac{x}{2}=\frac{3(3x-2)}{10}$ **S = $\mathbb{R}$** *Equ. Indét.*

6] $\frac{x}{2}-4+\frac{x}{3}=7+\frac{5x}{6}$ **S = $\varnothing$** *Equ. Impos.*

7] $\frac{x-2}{3}-\frac{12-x}{2}=\frac{5x-36}{4}-1$ **S = {8}**

8] $\frac{3x}{2}-\frac{2x}{3}=5\left(\frac{x}{6}+1\right)-5$ **S = $\mathbb{R}$** *Equ. Indét*

Série 2

1] $\frac{(x-1)}{4}-\frac{x-2}{3}+\frac{-x-4}{2}=x-1$ **S = {$-\frac{7}{19}$}**

2] $2x-\frac{2x}{9}=\frac{1}{9}\left(16x-\frac{3}{2}\right)$ **S = $\varnothing$** *Equ. Impos.*

3] $\frac{6+x}{9}-\frac{9-x}{12}=\frac{x-3}{4}-\frac{6-x}{9}$ **S = {8}**

4] $\frac{x+1}{2}-\frac{6x+7}{8}=\frac{4-3x}{5}-\frac{1}{8}$ **S = {3}**

5] $\frac{2x}{5}-\frac{1}{3}\left(\frac{5x}{4}-4\right)=x+\frac{27}{5}$ **S = {-4}**

6] $x-\left(\frac{x}{33}+\frac{2(x-15)}{3}\right)=\frac{12}{11}$ **S = {-29,4}**

7] $\frac{1}{2}(x+10)-2(x-5)=\frac{5}{6}(34-x)-\frac{2}{3}(x+2)$ **S = $\varnothing$** *Equ. Impos.*

8] $\frac{-2x-1}{3}-\frac{-3x-1}{2}=1-x$ **S = {$-\frac{5}{11}$}**

Pour <u>chacune</u> des propositions, <u>**entoure**</u> OUI ou NON :

3 est solution de :		
$12x - 6 = 10x$	OUI	NON
$x + 3 = 3$	OUI	NON
$x - 3 = -(x - 3)$	OUI	NON
$0x = 0$	OUI	NON
$0x = 3$	OUI	NON

Pour <u>chacune</u> des équations, **coche *<u>la</u>*** proposition correcte (***tu travailles dans l'ensemble R***).

5x = 0

- ☐ a « ***une infinité*** » de solutions.
- ☐ a « ***0*** » pour seule solution.
- ☐ a « ***1*** » pour seule solution.
- ☐ a « ***une seule*** solution qui n'est ***ni 0, ni 1*** ».
- ☐ ***n'a pas*** de solution.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES
MATH POUR RÉUSSIR : PAGES 17 À 25

3. EQUATIONS D'UN DEGRE SUPERIEUR A UN (SE RAMENANT A LA RESOLUTION D'EQUATIONS DU PREMIER DEGRE)

<u>3.1.</u> <u>Propriété</u>

Pour résoudre certaines équations différentes de celles envisagées en $2^{\text{ème}}$ année, il faut utiliser une nouvelle propriété assez évidente :

Le produit de plusieurs réels est nul ssi un des facteurs du produit est nul.

L.M. : $\forall a, b, c \in R$ **:** $a.b.c = 0 \Leftrightarrow a = 0$ **ou** $b = 0$ **ou** $c = 0$

<u>3.2.</u> <u>Exemples</u>

Résous dans R les équations suivantes :

1] $2x^2 - 8x = 0$

$\Leftrightarrow 2x.(x - 4) = 0$ ☐$_1$: mise en évidence

$\Leftrightarrow 2x = 0$ou $\quad x - 4 = 0$ ☐$_2$: règle du produit nul

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad$ ou $\quad x = 4$

$S = \{0 ; 4\}$

2] $2x^3 - 7x^2 + x + 10 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2).(x + 1).(2x - 5) = 0$ ☐$_1$: méthode des rectangles (voir avant)

$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \quad$ ou $\quad x + 1 = 0 \quad$ ou $\quad 2x - 5 = 0$ ☐$_2$: règle du produit nul

$\Leftrightarrow x = 2 \quad$ ou $\quad x = -1 \quad$ ou $\quad x = 5/2$

$S = \{2 ; -1 ; 5/2\}$

3] $x^3 = 5x(x - 1) - x$

$\Leftrightarrow x^3 = 5x^2 - 5x - x$	$\square_1$: effectuer
$\Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 6x = 0$	$\square_2$: réduire et principes d'équivalences
$\Leftrightarrow x(x^2 - 5x + 6) = 0$	$\square_4$: mise en évidence
$\Leftrightarrow x(x - 2)(x - 3) = 0$	$\square_5$: méthode des rectangles
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$ ou $x = 3$	$\square_6$: règle du produit nul

$$S = \{0 ; 2 ; 3\}$$

3.3. Résolution

En résumé, marche à suivre pour résoudre une équation d'un degré supérieur à un (en 3è année - se ramenant à une équation du premier degré) :

1. **Après avoir effectués et réduis tous les termes, tu transformes l'équation obtenue en plaçant tous les termes dans un membre de l'équation et ainsi obtenir « 0 » dans l'autre membre (*TOUT = 0*)**
2. **Tu factorises alors ce membre non nul pour obtenir un *maximum* de facteurs du premier degré. Certains polynômes du deuxième degré ne sont pas « factorisables » (Voir synthèse factorisation – *FACTORISER AU MAXIMUM*)**
3. **Appliquer la règle du produit nul (*A.B.C = 0 ⇔ A = 0 ou B = 0 ou C = 0*)**
4. **Résoudre chaque petite équation du premier degré ainsi obtenue et noter l'ensemble des solutions. (*RESOUDRE et CONCLURE*)**

3.4. Exercices d'entrainement

Série 1

1] $x.(x - 3) = 0$	$S = \{0 ; 3\}$	2] $(x + 5).3x = 0$	$S = \{0 ; -5\}$
3] $(2x - 3).(5x - 2) = 0$	$S = \{\frac{3}{2} ; \frac{2}{5}\}$	4] $-3x.(3x + 1).(-5x + 7) = 0$	$S = \{0 ; \frac{-1}{3} ; \frac{7}{5}\}$
5] $x.(1 - 3x).(8x + 1) = 0$	$S = \{0 ; \frac{1}{3} ; \frac{-1}{8}\}$	6] $3x^2.(7 + 5x).(2x - 8) = 0$	$S = \{0 ; \frac{-7}{5} ; 4\}$

Série 2

1] $x^2 = 9$	$S = \{-3 ; 3\}$
2] $x^2 = 3x$	$S = \{0 ; 3\}$
3] $169x^2 - 225 = 0$	$S = \{\frac{15}{13} ; -\frac{15}{13}\}$
4] $3x(-x + 3) = 6(-x + 3)$	$S = \{2 ; 3\}$
5] $x^2 + 4 = 0$	$S = \varnothing$
6] $2x^2 + x - 15 = 0$	$S = \{-3 ; \frac{5}{2}\}$
7] $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$	$S = \{0 ; 3 ; -1\}$
8] $x^2 - 4x = -4$	$S = \{ 2 \}$
9] $(3x - 6).(-5x - 2) = 0$	$S = \{2 ; \frac{-2}{5}\}$
10] $4x^2 - 6 = 1$	$S = \{-\frac{\sqrt{7}}{2} ; \frac{\sqrt{7}}{2}\}$
11] $x^3 + 6x = 7x^2$	$S = \{0 ; 1 ; 6\}$

Série 3

1] $x^2 - 7 = 0$	$S = \{-\sqrt{7} ; \sqrt{7}\}$
2] $(3x + 2)^2 = (2x - 1)^2$	$S = \{\frac{-1}{5} ; -3\}$
3] $(x - 9)^2 = 1$	$S = \{8 ; 10\}$
4] $(5x - 1)^2 - (2x + 3)^2 = 0$	$S = \{\frac{-2}{7} ; \frac{4}{3}\}$
5] $x^3 = 3x$	$S = \{0 ; -\sqrt{3} ; \sqrt{3}\}$
6] $2x^3 - 8x^2 + 2x - 8 = 0$	$S = \{4\}$
7] $5x(x - 2) - 7(x - 2) = 0$	$S = \{2 ; \frac{7}{5}\}$
8] $x^2 + 3 = 0$	$S = \varnothing$
9] $2x^3 - x^2 = 8x - 4$	$S = \{\frac{1}{2} ; -2 ; 2\}$
10] $\frac{4}{3}x + \frac{4}{9}x^2 = -1$	$S = \{\frac{-3}{2}\}$
11] $3x.(5 - 3x).(3x + 2) = 0$	$S = \{0 ; \frac{5}{3} ; \frac{-2}{3}\}$

Série 4 $S = \varnothing$

1] $x^2 = -2$	$S = \varnothing$
2] $7x(x + 3) – 5(-x - 3) = 0$	$S = \{\frac{-5}{7} ; -3\}$
3] $4x^2 = (5 – 3x)^2$	$S = \{1 ; 5\}$
4] $3x^3 - 6x^2 = -3x$	$S = \{0 ; 1\}$
5] $x^5 = x$	$S = \{0 ; -1 ; 1\}$
6] $5x(x – 3) – 9(3 – x) = 0$	$S = \{3 ; \frac{-9}{5}\}$
7] $6 = x^2$	$S = \{-\sqrt{6} ; \sqrt{6}\}$
8] $–4x^2.(5x - 7) = 0$	$S = \{0 ; \frac{7}{5}\}$
9] $x^3 - x = 3x^2 - 3$	$S = \{-1 ; 1 ; 3\}$

Série 5

1] $(x – 2)^2 = 9(x – 2)$	$S = \{2 ; 11\}$
2] $(6x + 1)^2 - (4x - 2)^2 = 0$	$S = \{\frac{-3}{2} ; \frac{1}{10}\}$
3] $(x + 2)^2 - 9(x + 2) = 0$	$S = \{-2 ; 7\}$
4] $5(-2x – 3) = 9x(3 + 2x)$	$S = \{\frac{-3}{2} ; \frac{-5}{9}\}$
5] $x^3 + x^2 = 4x + 4$	$S = \{-2 ; -1 ; 2\}$
6] $–5 – x^2 = 0$	$S = \varnothing$
7] $x^2 = 5x$	$S = \{0 ; 5\}$
8] $x^3 + 2x^2 - 5x – 6 = 0$	$S = \{-1 ; 2 ; -3\}$
9] $(2x + 3)(x – 1) – (2x + 3)(5 – x) = 0$	$S = \{\frac{-3}{2} ; 3\}$

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES
MATH POUR RÉUSSIR : PAGES 26 À 28

4. INEQUATION DU PREMIER DEGRE A UNE INCONNUE

4.1. Vocabulaire et notations

1. Une **inéquation** est une **inégalité** ($>$; $<$; $\leq$; $\geq$) qui renferme au moins une **inconnue**.
2. **Résoudre** une inéquation c'est trouver toutes les **valeurs de l'inconnue** qui vérifient l'inégalité. Ces valeurs sont appelées **solutions** de l'inéquation.
3. **Convention d'écriture (a et b sont des réels):**

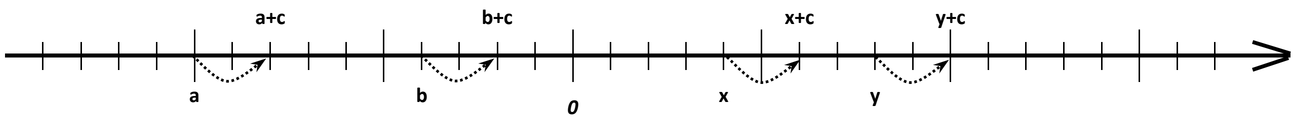
L'écriture	*signifie que*
$a < b$	a est **plus petit** que b
$a > b$	a est **plus grand** que b
$a \leq b$	a est soit **plus petit**, soit **égal** à b
$a \geq b$	a est soit **plus grand**, soit **égal** à b

4.2. Principes d'équivalence

4.2.1. Pour l'addition

Les nombres **a + c** et **b + c** sont rangés dans le même ordre que les nombres **a** et **b**.

Exemple :



$$a < b < x < y \Rightarrow a + c < b + c < x + c < y + c$$

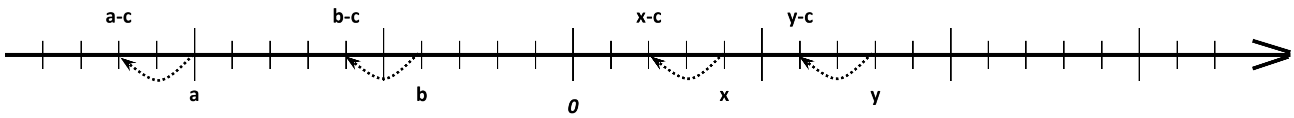
Si on ajoute un même nombre aux deux membres d'une inégalité, on conserve l'ordre.

$$\forall\, a, b, c \in R : a < b \Rightarrow a + c < b + c$$
$$\forall\, a, b, c \in R : a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$$
$$\forall\, a, b, c \in R : a > b \Rightarrow a + c > b + c$$
$$\forall\, a, b, c \in R : a \geq b \Rightarrow a + c \geq b + c$$

4.2.2. ***Pour la soustraction***

Les nombres **a - c** et **b - c** sont rangés dans le même ordre que les nombres **a** et **b**.

Exemple :



$$\mathbf{a < b < x < y \Rightarrow a - c < b - c < x - c < y - c}$$

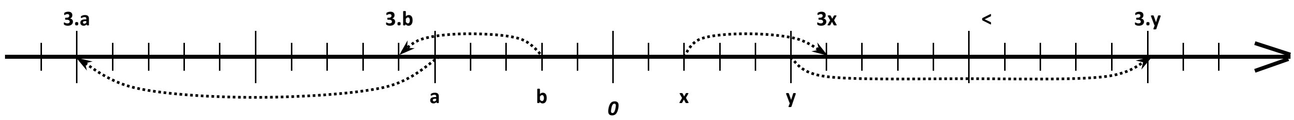
Si on retranche un même nombre aux deux membres d'une inégalité, on conserve l'ordre.

$$\forall\ a, b, c \in R : \mathbf{a < b \Rightarrow a - c < b - c}$$
$$\forall\ a, b, c \in R : \mathbf{a \leq b \Rightarrow a - c \leq b - c}$$
$$\forall\ a, b, c \in R : \mathbf{a > b \Rightarrow a - c > b - c}$$
$$\forall\ a, b, c \in R : \mathbf{a \geq b \Rightarrow a - c \geq b - c}$$

4.2.3. ***Pour la multiplication (et la division)***

Lorsque **c est strictement positif**, les nombres **a.c** et **b.c** sont rangés dans le **même ordre** que les nombres **a** et **b**.

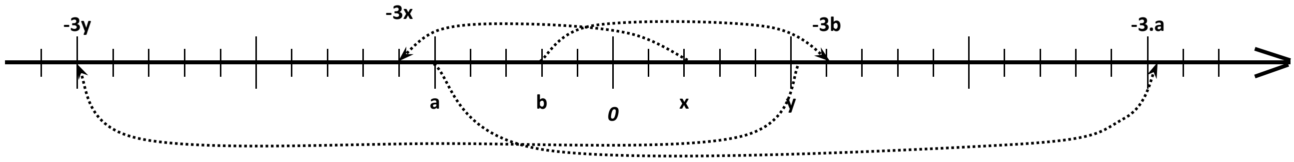
Exemple (c = 3) :



$$\mathbf{a < b < x < y \Rightarrow 3.a < 3.b < 3.x < 3.y}$$

Lorsque **c est strictement négatif**, les nombres **a.c** et **b.c** sont rangés dans **l'ordre inverse** des nombres **a** et **b**.

Exemple (c = -3) :



$$\mathbf{a < b < x < y \Rightarrow -3.a > -3.b > -3.x > -3.y}$$

Si on multiplie (divise) les deux membres d'une inégalité par un même nombre ***strictement positif***, on ***conserve l'ordre*** :

$$\forall\ a, b \in R\ ; \forall\ c \in R_0^+ : \mathbf{a < b \Rightarrow a.c < b.c}$$
$$\forall\ a, b \in R\ ; \forall\ c \in R_0^+ : \mathbf{a \leq b \Rightarrow a.c \leq b.c}$$
$$\forall\ a, b \in R\ ; \forall\ c \in R_0^+ : \mathbf{a > b \Rightarrow a.c > b.c}$$
$$\forall\ a, b \in R\ ; \forall\ c \in R_0^+ : \mathbf{a \geq b \Rightarrow a.c \geq b.c}$$

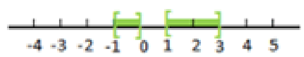
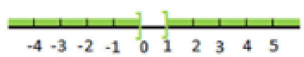
Si on multiplie (divise) les deux membres d'une inégalité par un même nombre ***strictement négatif***, on ***inverse l'ordre*** :

$$\forall\ a, b \in R\ ; \forall\ c \in R_0^- : \mathbf{a < b \Rightarrow a.c > b.c}$$
$$\forall\ a, b \in R\ ; \forall\ c \in R_0^- : \mathbf{a \leq b \Rightarrow a.c \geq b.c}$$
$$\forall\ a, b \in R\ ; \forall\ c \in R_0^- : \mathbf{a > b \Rightarrow a.c < b.c}$$
$$\forall\ a, b \in R\ ; \forall\ c \in R_0^- : \mathbf{a \geq b \Rightarrow a.c \leq b.c}$$

4.2.4. ***En résumé…***

Pour résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue, tu utilises les mêmes principes d'équivalences que pour les équations excepté quand tu multiplies ou tu divises les deux membres de l'inégalité par un même nombre strictement négatif. Dans ce cas, tu dois inverser l'ordre.

4.3. Ecritures de l'ensemble des solutions

Intervalle	Encadrement	Droite graduée
$x \in]-\infty\,;0]$	$x \leq 0$	
$x \in [-2\,;2[$	$-2 \leq x < 2$	
$x \in]1\,;\,+\infty[$	$x > 1$	
$x \in [-1\,;0] \cup [1\,;3]$	$-1 \leq x \leq 0$ ou $1 \leq x \leq 3$	
$x \in]-\infty\,;0] \cup]1\,;\,+\infty[$	$x \leq 0$ ou $x > 1$	

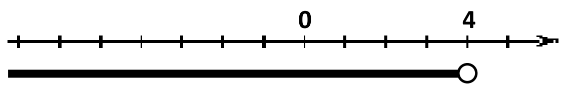
Exemple 1 :

Résous l'inéquation :

$$3x - 4 < 8 \Leftrightarrow 3x < 12$$
$$\Leftrightarrow x < 4$$

Tous les nombres strictement inférieurs à 4 sont solutions de l'inéquation.

Représentation graphique :



Ensemble des solutions :

S =]-∞ ; 4[ou encore $\mathbf{S} = \{x \in \mathbb{R} : x < 4\}$

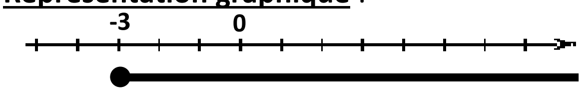
Exemple 2 :

Résous l'inéquation :

$$-2x + 5 \leq 11 \Leftrightarrow -2x \leq 6$$
$$\Leftrightarrow x \geq -3 \text{ !!}$$

Tous les nombres supérieurs ou égaux à -3 sont solutions de l'inéquation.

Représentation graphique :



Ensemble des solutions :

S = [-3 ; +∞[ou encore $\mathbf{S} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -3\}$

4.4. Inéquations particulières

Certaines inéquations qui semblent être du premier degré ne le sont pas quand à la fin de la résolution tu trouves une inégalité du type :

$$0.x < a \ (a \in \mathbb{R})$$

✓ Premier cas : la condition est toujours vérifiée

Exemples :

0.x < 7	**0.x ≤ 0**	**0.x > -2**	**0.x ≥ 0**

Ces inégalités sont vraies pour toutes les valeurs de *x* et tout nombre est solution de l'inéquation ; elle est ***indéterminée***.

Inéquation indéterminée : S = R

✓ Deuxième cas : la condition n'est jamais vérifiée

Exemples :

0.x < 0	**0.x ≤ -3**	**0.x > 0**	**0.x ≥ 2**

Ces inégalités sont fausses pour toutes les valeurs de *x* et l'inéquation n'admet aucune solution; elle est ***impossible***.

Inéquation impossible : S = { } ou S = ∅

4.5. Exercices d'entrainement

Série 1

1] $7x - 6 > 5 + 6x$

2] $12 - 5x > x - 60$

3] $4(5 + x) > 5(x + 3)$

4] $3 - 4(5 - x) \leq 4x + 5$

5] $2(4x + 1) \geq 5x + 8$

6] $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} > \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$

7] $\frac{x}{2} + 4 > \frac{2x}{3} - \frac{x}{8}$

8] $\frac{3x-1}{5} - \frac{13}{2} \geq \frac{7x}{3} - \frac{11(x+3)}{6}$

9] $\frac{2x}{5} - \frac{2x-17}{3} < 10 - \frac{2x-6}{2}$

10] $8x + \frac{14x}{5} \geq 66 - \frac{12x}{5}$

Série 2

1] $2(3x + 2) > 5(3x - 10)$

2] $7(x - 5) - x \leq 2(x - 3)$

3] $-3(x - 7) > 4(x - 2)$

4] $7x - 9 \geq 3(2x - 3) - x$

5] $8(2x - 3) \leq 4x - 3(x - 2)$

6] $\frac{5x-2}{3} - \frac{4x-3}{2} \leq \frac{x}{2}$

7] $\frac{7x-3}{2} - \frac{2-x}{4} > x - \frac{x+1}{3}$

8] $\frac{3x-14}{12} + \frac{3x-2}{4} > \frac{2x-1}{3}$

9] $\frac{1}{6}\left(\frac{7x}{4} + x\right) > x - \frac{13}{2}$

10] $\frac{2x-3}{2} - \frac{4-5x}{3} < \frac{x-3}{5} - \frac{2-x}{4}$

Série 3

1] $\frac{3x-1}{5} - \frac{x+1}{2} < 1 - \frac{x}{7}$

2] $\frac{3x-1}{12} - \frac{3}{4} < 2x - \frac{5(1-2x)}{6}$

3] $x - \frac{3x+1}{2} - \frac{4x-1}{3} + \frac{11x}{6} \leq 0$

4] $\frac{3-x}{12} - \frac{3(x-2)}{4} \geq \frac{1}{12} - \frac{5(x-2)}{6}$

5] $\frac{x}{8} - \frac{1-x}{4} - \frac{1+x}{3} > \frac{x-2}{24}$

6] $\frac{x-3}{4} + \frac{2x-5}{5} \leq 1 - 3x$

7] $\frac{2x-1}{3} < \frac{4x-2}{7}$

8] $\frac{x+1}{4} - \frac{2x-3}{3} \leq \frac{1}{3} - \frac{x}{5}$

9] $\frac{3x-2}{2} - \frac{2x-1}{5} > \frac{1}{3} - \frac{x}{5}$

10] $\frac{4x-3}{7} - \frac{5x-3}{14} \leq \frac{8x-5}{21}$

Série 4

1] $\begin{cases} 5(x-1) < 3(x-2) \\ 2(x+4) > 3x - 1 \end{cases}$

2] $\begin{cases} 4(2+x) > 2x \\ x + 4 \geq 6(3-x) \end{cases}$

3] $\begin{cases} 2 - 3(1-2x) \geq (3x+4) - 5 \\ 4 \geq 6(x-2) \end{cases}$

4] $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{x}{3} \geq \frac{x}{4} - 1 \\ \frac{x+4}{3} \leq 2(1-x) \end{cases}$

5] $\begin{cases} 3x - 2(1+x) \leq 5 \\ 5(x-3) - (x+1) > -9 \end{cases}$

6] $\begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{x-1}{3} \leq 2 - x \\ 3(x-1) + 5(x-2) > 4(1-x) \end{cases}$

7] $\begin{cases} 2 - 3(2x-5) > 4 - 3(2x-1) + x \\ 2x < (5-3x) - 0{,}5 \end{cases}$

8] $\begin{cases} 0{,}2x - 1{,}5 \leq 3{,}2(x-1) \\ (5{,}3x - 2{,}4).3 > 4{,}2(1{,}5x - 3) \end{cases}$

9] $\begin{cases} 4{,}2.(3{,}2x - 1{,}2) < -5(1{,}2x - 3) \\ 3{,}8x + 4{,}7 > 0{,}7 - 1{,}2x \end{cases}$

10] $\begin{cases} 0{,}5.(1{,}2x - 4{,}8) \geq 1{,}5(2x - 3) \\ 4.(x - 1{,}5) \leq 2{,}5.(3x - 2) \end{cases}$