Collège Saint-Barthélemy

Y. Michiels

Mathématique – Troisième année

4

UAA5 – Outils Algèbriques

Les radicaux d'indice 2 (et 3)

OBJECTIFS – UAA5 : Outils algébriques

Connaitre

- Calculer mentalement des racines carrées simples ou en donner une valeur approchée.
- Utiliser la calculatrice pour obtenir des arrondis de radicaux.

Appliquer

- Simplifier des radicaux numériques.
- Effectuer les opérations de base sur des radicaux numériques.

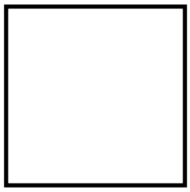
Transférer

- Résoudre un problème de construction ou de calcul dans des situations qui conduisent à utiliser le théorème de Pythagore ou sa réciproque.

EXPLORATION : LE SCANDALE DE LA DIAGONALE DU CARRE

1. Les Pythagoriciens voulaient expliquer tout l'univers à travers les nombres naturels. Pourtant ils vont faire une découverte terrible pour eux…

- ✓ Comment construire un carré dont l'aire est double de l'aire du carré de la figure ci-dessous (côté = 1 unité de longueur) ? (Aide : trace une ou les 2 diagonales)

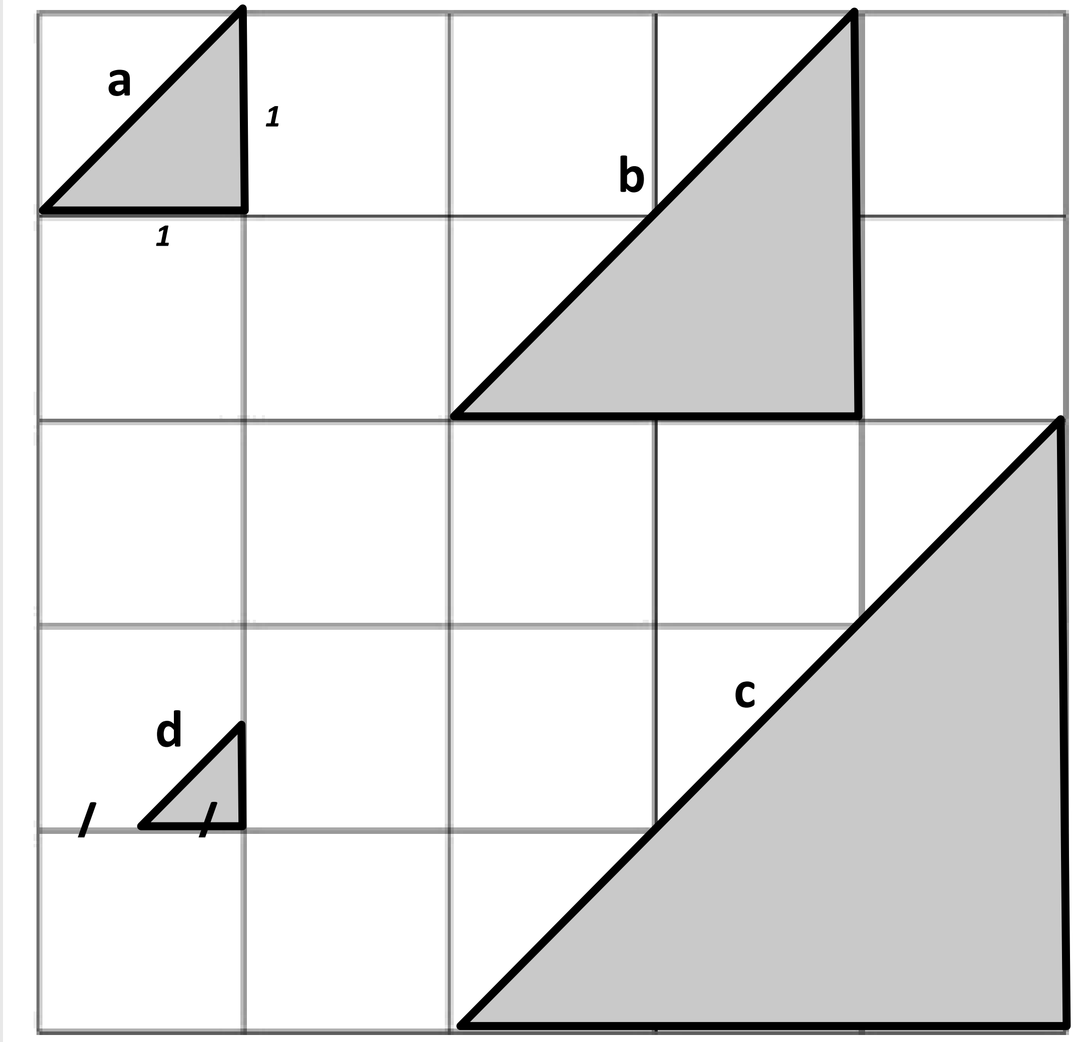


- ✓ Quelle est l'aire de ce carré ? Calcule la longueur du côté de ce deuxième carré. Est-ce un nombre naturel ? (Cherche d'abord sans utiliser de calculette).

📖*Synthèse sur les radicaux*

2. Quel est le nombre dont le carré vaut 2 ?

3. Détermine les longueurs ***a, b, c*** et ***d*** de l'hypoténuse de ces ***quatre triangles rectangles isocèles*** et compare ensuite les résultats obtenus (unité = longueur des côtés des carrés).



Solution triangle n°1 (recherche de a)	Solution triangle n°2 (recherche de b)
Solution triangle n°3 (recherche de c)	**Solution triangle n°4 (recherche de d)**

Comparaison de ***b***, ***c*** et ***d*** avec ***a*** ***:***

4. Utilise ta calculette pour « simplifier » les radicaux suivants, puis explique comment tu devrais procéder sans calculette :

Avec la calculette	Sans la calculette
1] $\sqrt{75} =$	$\sqrt{75} =$
2] $\sqrt{72} =$	$\sqrt{72} =$
3] $\sqrt{196} =$	$\sqrt{196} =$
4] $\sqrt{1300} =$	$\sqrt{1300} =$
5] $\sqrt{2268} =$	$\sqrt{2268} =$

5. Pour chacun des nombres suivants, souligne la (les) décompositions qui contien(nen)t un carré parfait puis entoure celle qui contient le plus grand carré parfait, si nécessaire :

12 →	2 . 6	3 . 4			
32 →	2 . 16	4 . 8			
48 →	2 . 24	3 . 16	4 . 12	6 . 8	
72 →	2 . 36	3 . 24	4 . 18	6 . 12	8 . 9
80 →	2 . 40	4 . 20	5 . 16	8 . 10	
90 →	2 . 45	3 . 30	5 . 18	6 . 15	9 . 10
200 →	2 . 100	4 . 50	8 . 25		

6. Simplifie les radicaux suivants :

a)	$\sqrt{12}$	b)	$\sqrt{28}$	c)	$\sqrt{27}$	d)	$\sqrt{500}$	e)	$\sqrt{250}$	f)	$\sqrt{60}$
g)	$\sqrt{72}$	h)	$\sqrt{128}$	i)	$\sqrt{640}$	j)	$\sqrt{144}$	k)	$\sqrt{20000}$	l)	$\sqrt{288}$
m)	$\sqrt{7^2.5}$	n)	$\sqrt{2^2.3^2.7}$	o)	$\sqrt{5^4}$	p)	$\sqrt{3^8}$	q)	$\sqrt{2^{10}}$	r)	$\sqrt{7^3}$
s)	$\sqrt{5^5}$	t)	$\sqrt{2^3.3^5.7^2}$	u)	$\sqrt{2^7}$	v)	$\sqrt{3^4.5^3}$	w)	$\sqrt{2.3^4.7^3}$	x)	$\sqrt{9.2^7}$
y)	$3\sqrt{8}$	z)	$4\sqrt{18}$	aa)	$5\sqrt{63}$	bb)	$6\sqrt{50}$	cc)	$7\sqrt{32}$	dd)	$8\sqrt{45}$

7. Avant l’invention des calculettes, les mathématiciens utilisaient une table de racines carrées à cinq décimales telle que celle-ci :

n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$
1	1	34	5,83095	67	8,18535
2	1,41421	35	5,91608	68	8,24621
3	1,73205	***36***	***6***	69	8,30662
4	***2***	37	6,08276	70	8,36660
5	2,23607	38	6,16441	71	8,42615
6	2,44949	39	6,24500	72	8,48528
7	2,64575	40	6,32456	73	8,54400
8	2,82843	41	6,40312	74	8,60233
9	***3***	42	6,48074	75	8,66025
10	3,16228	43	6,55744	76	8,71780
11	3,31662	44	6,63325	77	8,77496
12	3,46410	45	6,70820	78	8,83176
13	3,60555	46	6,78233	79	8,88819
14	3,74166	47	6,85565	80	8,94427
15	3,87298	48	6,92820	***81***	***9***
16	***4***	***49***	***7***	82	9,05539
17	4,12311	50	7,07107	83	9,11043
18	4,24264	51	7,14143	84	9,16515
19	4,35890	52	7,21110	85	9,21954
20	4,47214	53	7,28011	86	9,27362
21	4,58258	54	7,34847	87	9,32738
22	4,69042	55	7,41620	88	9,38083
23	4,79783	56	7,48331	89	9,43398
24	4,89898	57	7,54983	90	9,48683
25	***5***	58	7,61577	91	9,53939
26	5,09902	59	7,68115	92	9,59166
27	5,19615	60	7,74597	93	9,64365
28	5,29150	61	7,81025	94	9,69536
29	5,38516	62	7,87401	95	9,74679
30	5,47723	63	7,93725	96	9,79796
31	5,56776	***64***	***8***	97	9,84886
32	5,65685	65	8,06226	98	9,89949
33	5,74456	66	8,12404	99	9,94987

1] En utilisant uniquement la table, calcule une valeur approchée de :

$\sqrt{2900}$ $\sqrt{175}$ $\sqrt{128}$ $\sqrt{196}$

2] Réduis les sommes suivantes :

a) $4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} =$ b) $3\sqrt{7} - 9\sqrt{7} =$ c) $3\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 12\sqrt{2} =$

d) $\sqrt{18} - 5\sqrt{2} =$ e) $2\sqrt{12} + \sqrt{27} =$ f) $\sqrt{50} - 4\sqrt{18} =$

g) $-4\sqrt{75} + 3\sqrt{12} =$ h) $2\sqrt{8} - 3\sqrt{27} - 5\sqrt{32} - 4\sqrt{12} =$ i) $2\sqrt{25} - 3\sqrt{98} - 2\sqrt{16} + 3\sqrt{72} =$

j) $4\sqrt{5} + 5\sqrt{20} - 9 =$ k) $2\sqrt{169} - \sqrt{289} - \sqrt{225} + \sqrt{36} =$ l) $4\sqrt{100} - 3\sqrt{200} + 2\sqrt{2} - \sqrt{144} =$

3] Réduis les expressions suivantes :

a) $2\sqrt{5}\,.\sqrt{5} =$ b) $5\sqrt{7}\,.3\sqrt{7} =$ c) $3\sqrt{2} + 6\sqrt{2} =$

d) $2\sqrt{13}\,.3\sqrt{13} =$ e) $2\sqrt{6}\,.\sqrt{3}\,.3\sqrt{2} =$ f) $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 3) =$

g) $\sqrt{12} + \sqrt{75} =$ h) $(\sqrt{15} - \sqrt{7})(\sqrt{15} + \sqrt{7}) =$ i) $\sqrt{32}\,.3\sqrt{24}\,.\sqrt{8} =$

j) $(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 =$ k) $2\sqrt{169} - \sqrt{225} + \sqrt{36} - \sqrt{289} =$ l) $(3\sqrt{2} - \sqrt{3})(2\sqrt{6} + 3\sqrt{3}) =$

m) $(-2\sqrt{5})^2 + (5\sqrt{2})^2 =$ n) $2\sqrt{5}\,.\sqrt{15}\,.\sqrt{3} =$ o) $(3 - 3\sqrt{3})^2 =$

p) $(2\sqrt{3} + 5\sqrt{2}).\sqrt{24} =$ q) $(-2\sqrt{3} - 7\sqrt{2})(7\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) =$ r) $(-2\sqrt{2})^2.(-3\sqrt{2} - 2)^2 =$

4] Rends les dénominateurs rationnels :

a) $\frac{1}{\sqrt{2}} =$ b) $\sqrt{\frac{1}{5}} =$ c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} =$ d) $\sqrt{\frac{3}{7}} =$ e) $\frac{9}{2\sqrt{3}} =$ f) $\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} =$ g) $\frac{5\sqrt{3}}{4\sqrt{6}} =$

5] Rends les dénominateurs rationnels :

a) $\frac{1}{2 - \sqrt{3}} =$ b) $\frac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} =$ c) $\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5} + 1} =$ d) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} =$ e) $\frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2} - 5\sqrt{3}} =$

f) $\frac{2\sqrt{3} + 1}{3 - 2\sqrt{3}} =$ g) $\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} =$ h) $\frac{\sqrt{7} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2\sqrt{7}} =$ i) $\frac{3\sqrt{8} - 1}{2 + \sqrt{18}} =$ j) $\frac{2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}}{2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}} =$

6] Factorise

a) $x^2 - 7$ b) $x^2 - 13$ c) $4x^2 - 5$ d) $20 - 9x^2$ e) $25x^2 - 17$

f) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$ g) $x^2 - 2\sqrt{7}x + 7$ h) $x^2 - 6\sqrt{2}x + 18$ i) $x^2 + 4\sqrt{5}x + 20$ j) $4x^2 + 8\sqrt{3}x + 12$

7] Est-il vrai que seul un des quatre nombres suivants peut s'écrire sans radical ?

- ✓ $(3 + \sqrt{2})^2$
- ✓ $(3 - \sqrt{2})^2$
- ✓ $\sqrt{2}(3 + \sqrt{2})^2$
- ✓ $(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})$

8] Montrer qu'un rectangle MNOP tel que $\overline{MN} = \sqrt{18} - \sqrt{8}$ **et** $\overline{NO} = \sqrt{50} - \sqrt{32}$ est un carré et que son aire est un entier.

SYNTHÈSE : LES RADICAUX D'INDICE 2

1. DEFINITION ET VOCABULAIRE

Que signifie $\sqrt{a}$ (« a » est un nombre positif ou nul) ?

La racine carrée *positive* de *a* est le nombre positif dont le carré vaut *a*. Elle se note $\sqrt{a}$.

$$\forall\, a \in \mathbb{R}^+ : \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad \textbf{ou encore} \quad \sqrt{a}\,.\sqrt{a} = a$$

Dans l'expression $\sqrt{a}$, *a* est appelé le ***radicant*** et $\sqrt{\ }$ est le ***radical***.

Attention : $\dfrac{\sqrt{14}}{7} \neq \sqrt{2}$ mais $\sqrt{\dfrac{14}{7}} = \sqrt{2}$

Exemples :

$\sqrt{9} = 3$ car $3^2 = 9$

$\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$ car ....

$\sqrt{0} = ...$ car ....

$\sqrt{1} = ...$ car ....

$\sqrt{\dfrac{1}{4}}$ = ... car ....

$\sqrt{4900} = ...$ car ....

Commentaires importants :

1) Si $\sqrt{a}$ existe, cette écriture comporte trois informations :
   - ✓ $a \geq 0$
   - ✓ $\sqrt{a} \geq 0$
   - ✓ $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

2) Il existe aussi ***une racine carrée négative***, opposée de la racine carrée positive et notée :

   $-\sqrt{a}$ ($a \geq 0$). (Exemple : $-\sqrt{25}$ = -5)

   Par conséquent, l'équation ***x^2 = 7*** a deux solutions :

   x = $\sqrt{7}$ ***et*** ***x = -*** $\sqrt{7}$

   car $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$ et $\left(-\sqrt{7}\right)^2 = 7$ aussi.

3) Un nombre strictement négatif n'a pas de racine carrée ***réelle***.

   - 64 n'a pas de racine carrée réelle car il n'existe aucun nombre réel *x* tel que :

   $x^2 = -64$

4) Comme la racine carrée d'un nombre est toujours positive :

   $\sqrt{a^2} = a$ si $a \geq 0$ ex. : $\sqrt{7^2} = 7$

   $\sqrt{a^2} = -a$ si $a < 0$ ex. : $\sqrt{(-7)^2} = oppos\acute{e}\ de(-7) = -(-7) = 7$

ce qui peut s'écrire en une seule formule étendue aux nombres rationnels. Ainsi :

$$\forall\, a \in \mathbb{Q} : \sqrt{a^2} = |a| \text{ (valeur absolue de a)}$$

2. RACINE D'UN PRODUIT

Nos découvertes nous ont permis de conjecturer deux propriétés :

Exemple :

$$\sqrt{4.9} = \sqrt{4}.\sqrt{9}$$
$$= 2.3$$
$$= 6$$

Cette propriété sera démontrée en quatrième année :

La racine carrée positive d'un produit de deux nombres positifs est égale au produit des racines carrées de ces deux nombres.

$$\forall\, \mathbf{a, b} \in \mathbf{R}^+ : \sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$$

3. RACINE D'UN QUOTIENT

Exemple :

$$\sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}}$$
$$= \frac{5}{7}$$

Cette propriété sera également démontrée en quatrième année :

La racine carrée positive d'un quotient de deux nombres positifs (le deuxième étant différent de zéro) est égale au quotient des racines carrées de ces deux nombres.

$$\forall\, \mathbf{a} \in \mathbf{R}^+ ; \forall\, \mathbf{b} \in \mathbf{R}_0^+ : \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

4. RACINE D'UNE SOMME (OU D'UNE DIFFERENCE)

On aurait envie de prolonger ces deux règles à la racine carrée d'une somme.

Prenons un exemple :

$$\sqrt{16+9} = \sqrt{25}$$
$$= 5$$

mais

$$\sqrt{16+9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9}$$
$$= 4 + 3$$
$$= 7$$

Il n'existe aucun résultat général qui transforme l'écriture de la racine carrée d'une somme ou d'une différence.

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

5. EN PRATIQUE…

5.1. Simplification de radicaux

Exemples :

$$\begin{aligned}\sqrt{8} &= \sqrt{4.2}\\ &= \sqrt{4}.\sqrt{2}\\ &= 2.\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{75} &= \sqrt{25.3}\\ &= \sqrt{25}.\sqrt{3}\\ &= 5.\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{4536} &= \sqrt{2^3.3^4.7}\\ &= \sqrt{2^2}.\sqrt{2}.\sqrt{3^2}.\sqrt{3^2}.\sqrt{7}\\ &= 2.\sqrt{2}.3.3.\sqrt{7}\\ &= 2.3.3.\sqrt{2.7}\\ &= 18\sqrt{14}\end{aligned}$$

Avec…

4536	2
2268	2
1134	2
567	3
189	3
63	3
21	3
7	7
1	

Remarque :

Il faut toujours simplifier les radicaux au maximum en vue de calcul plus complexes…

5.2. Additions et soustractions

Exemples :

$$\begin{aligned}7\sqrt{3}+5\sqrt{2}+2\sqrt{3}-4\sqrt{2} &= \sqrt{3}.(7+2)+\sqrt{2}(5-4)\\ &= 9\sqrt{3}+\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3\sqrt{8}+2\sqrt{18}+7-\sqrt{75}-4\sqrt{12} &= 3\sqrt{4.2}+2\sqrt{9.2}+7-\sqrt{25.3}-4\sqrt{4.3}\\ &= 3.2\sqrt{2}+2.3\sqrt{2}+7-5\sqrt{3}-4.2\sqrt{3}\\ &= 6\sqrt{2}+6\sqrt{2}+7-5\sqrt{3}-8\sqrt{3}\\ &= 12\sqrt{2}-13\sqrt{3}+7\end{aligned}$$

5.3. Multiplications

Exemples :

$$\sqrt{5}.\sqrt{2} = \sqrt{5.2} = \sqrt{10}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{18}.\sqrt{75} &= 3\sqrt{2}.5\sqrt{3}\\ &= 3.5\sqrt{2.3}\\ &= 15\sqrt{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{18}.3\sqrt{75}.2\sqrt{8}.\sqrt{56}\sqrt{7} &= 3\sqrt{2}.15\sqrt{3}.4\sqrt{2}.2\sqrt{14}.\sqrt{7}\\ &= 360\sqrt{2.3.2.7.2.7}\\ &= 360.2.7\sqrt{6}\\ &= 5040\sqrt{6}\end{aligned}$$

5.4. Rendre rationnel le dénominateur d'une fraction

1] *Si le dénominateur est un monôme comprenant une racine carrée, tu multiplies numérateur et dénominateur de la fraction par la racine carrée présente au dénominateur*

Exemples :

$$\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3.\sqrt{\boldsymbol{2}}}{\sqrt{2}.\sqrt{\boldsymbol{2}}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{2}{3\sqrt{5}}=\frac{2.\sqrt{\boldsymbol{5}}}{3\sqrt{5}.\sqrt{\boldsymbol{5}}}=\frac{2\sqrt{5}}{15}$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{2}.\sqrt{\boldsymbol{3}}}{\sqrt{3}.\sqrt{\boldsymbol{3}}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

2] *Si le dénominateur est un binôme comprenant une racine carrée, tu multiplies numérateur et dénominateur de la fraction par le binôme conjugué du dénominateur*

Exemples :

$$\begin{aligned}\frac{38}{5-\sqrt{6}}&=\frac{38.(\boldsymbol{5}+\sqrt{\boldsymbol{6}})}{(5-\sqrt{6}).(\boldsymbol{5}+\sqrt{\boldsymbol{6}})}\\&=\frac{38.(5+\sqrt{6})}{25-6}\\&=\frac{38(5+\sqrt{6})}{19}\\&=2(5+\sqrt{6})\end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+1).(\sqrt{\boldsymbol{6}}+\sqrt{\boldsymbol{2}})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2}).(\sqrt{\boldsymbol{6}}+\sqrt{\boldsymbol{2}})}$$

$$=\frac{\sqrt{18}+\sqrt{6}+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{6-2}$$

$$=\frac{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{4}$$

$$=\frac{2.(2\sqrt{2}+\sqrt{6})}{4}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES
MATH POUR RÉUSSIR : PAGES 6 À 16

6. ENCADREMENT ET CALCUL D'UNE RACINE CARREE

Essayons de déterminer la valeur *exacte* de $\sqrt{2}$. Nous savons que :

$1^2 < 2 < 2^2$, on en déduit que $1 < \sqrt{2} < 2$

Par approximation successive, nous avons que :

$1,4^2 < 2 < 1,5^2$, on en déduit que $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

($1,4^2 = 1,96$ et $1,5^2 = 2,25$)

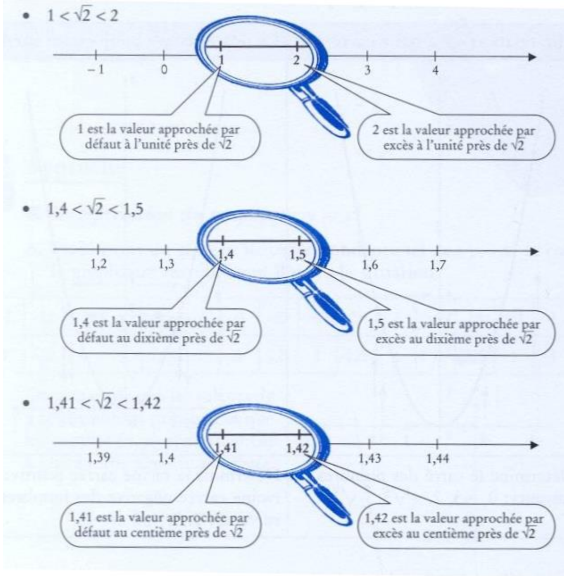
$1,41^2 < 2 < 1,42^2$, on en déduit que $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$

($1,41^2 = 1,9881$ et $1,42^2 = 2,0164$)

$1,414^2 < 2 < 1,415^2$, on en déduit que $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$

($1,414^2 = 1,999396$ et $1,415^2 = 2,002225$)

…



On a beau continuer, pas moyen de trouver une valeur exacte de $\sqrt{2}$.

- ✓ La valeur à gauche de $\sqrt{2}$ est, dans chaque cas, un réel plus petit que $\sqrt{2}$: c'est une **valeur approchée par défaut de** $\sqrt{2}$.
- ✓ La valeur à droite de $\sqrt{2}$ est, dans chaque cas, un réel plus grand que $\sqrt{2}$: c'est une **valeur approchée par excès de** $\sqrt{2}$.
- ✓ **L'approximation** est l'écart entre la valeur approchée par excès et celle par défaut. Le plus souvent, il s'agit d'une puissance de 10 (à une unité près, au dixième près, au 0,01 près, à 10^{-3} près, …).

Pourquoi alors, ne pas transformer ce nombre $\sqrt{2}$ en fraction comme nous l'avons déjà fait avec les nombres décimaux illimités périodiques ? Parce que c'est impossible. Et nous allons le prouver en utilisant une démonstration dite ***par l'absurde***.

Supposons qu'il existe une fraction ***irréductible*** $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ (on peut s'arranger pour que $a \wedge b = 1$). De ce postulat, nous allons déduire une conclusion en contradiction avec nos hypothèses de départ, ce qui suffira pour prouver que notre supposition de départ est fausse et que son contraire est donc vrai.

1) Elevons les membres de l'égalité au carré :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2 \qquad \textit{Par conséquent : } a^2 = 2 \cdot b^2 \qquad (1)$$

2) Le nombre « a » est soit pair, soit impair :

- ➢ ***Si « a » est un nombre impair,*** alors « a^2 » est aussi impair. Ce qui est impossible puisque « $a^2 = 2b^2$ » et est donc pair. Donc « a » ne peut être impair.
- ➢ ***Si « a » est un nombre pair,*** alors « $a = 2n$ » et « $a^2 = 4n^2$ ». Donc « $2b^2 = 4n^2$ » et « $b^2 = 2n^2$ ». Le carré de « b » est pair, donc « b » est pair. Or, « a » et « b » ne peuvent être pairs en même temps, sinon la fraction $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ n'est pas irréductible. Donc « a » ne peut être pair non plus

3) Conclusion :

« a » n'existe pas !

Conclusion et rappels :

$\sqrt{2}$ n'est donc pas un nombre rationnel car on ne peut le mettre sous forme de fraction. En fait, c'est un nombre ***irrationnel***. Les nombres irrationnels sont ceux dont l'écriture décimale est infinie et ne comporte pas de période.

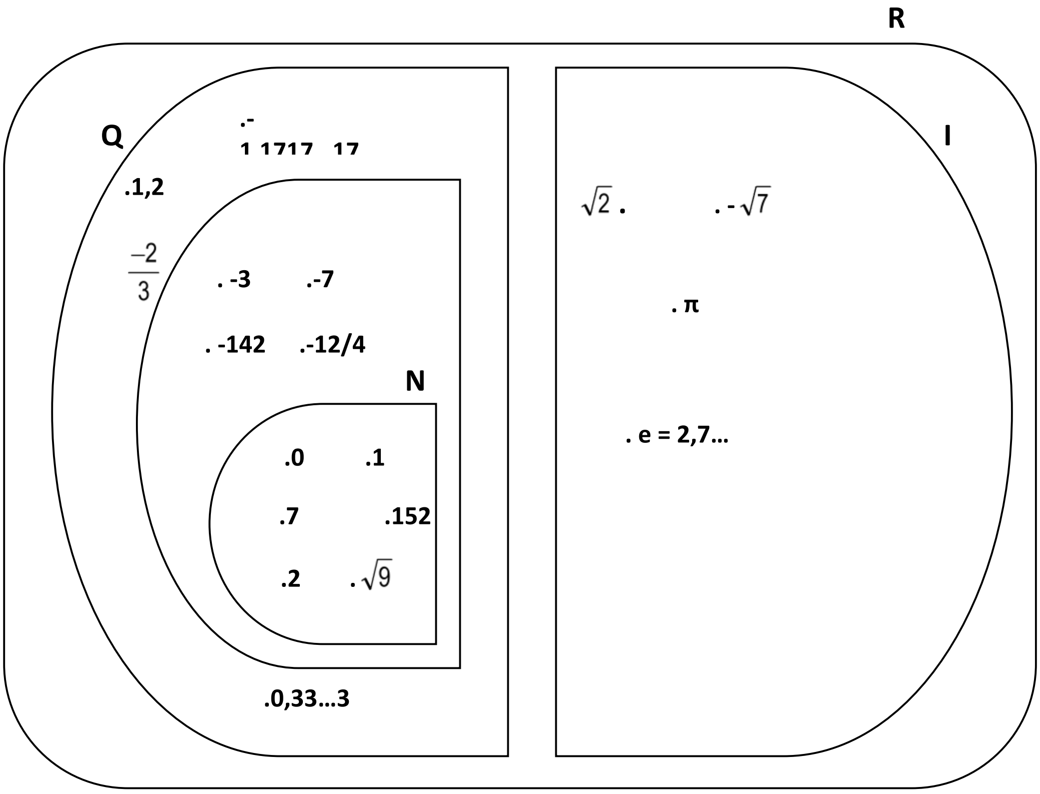
Attention ! $\sqrt{4} = 2$ n'est pas un nombre irrationnel, c'est un nombre naturel.

N = {0 ; 1 ; 2 ; …} = ensemble des nombres ***naturels***, ceux qui servent à compter.

Z = {… ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; …} = ensemble des ***entiers***, ceux qui n'ont pas de partie décimale.

Q = {… ; ½ ; -3/5 ; -4 ; … ; 0 ; 1,77…7… ; -12,45858…58… ; -2 ; …} = ensemble des nombres ***rationnels***, ceux qu'on peut transformer en fractions à termes entiers (*entiers, décimaux limités et illimités périodiques*).

I = {… ; $-\sqrt{3}$; π ; $\sqrt{2}$; …} ensemble des nombres ***irrationnels***, ceux qu'on ne peut transformer en fractions à termes entiers (*décimaux illimités non périodiques)*.



Tous ces nombres, mis dans un même ensemble forment l'ensemble des ***réels*** noté **R**.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES
MATH POUR RÉUSSIR : PAGE 5

7. SCHEMA HEURISTIQUE : RADICAUX

COLLÈGE SAINT-BARTHÉLEMY

LES RADICAUX D'INDICE 2 ($\sqrt{a}$)

De quoi s'agit-il ?

Si « a » est un nombre positif, $\sqrt{a}$ est un nombre positif tel que : $(\sqrt{a})^2 = a$

Exemple : $\sqrt{81} = 9$ car $9^2 = 81$

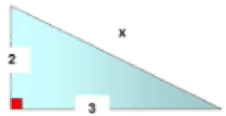
Pour quoi faire ?

Les radicaux sont utilisés pour résoudre des équations du type : $x^2 = ...$

Exemple : Pythagore $x^2 = 2^2 + 3^2$

$\Leftrightarrow x^2 = 4 + 9$

$\Leftrightarrow x^2 = 13 \Rightarrow x = \sqrt{13}$



Vocabulaire : dans $\sqrt{a}$

$\sqrt{\square}$ est le radical

« a » est le radicant

IMPORTANT

La racine carrée de (-25) n'existe pas car aucun nombre réel élevé au carré ne donne -25 !!

Par contre, $-\sqrt{7}$ est l'opposé de $\sqrt{7}$.

$\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$ et $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ mais

$\sqrt{a+b}$ n'est pas égal à $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

Cours Yves Michiels

Comment faire...

1) Pour « évaluer » une racine carrée ?

Si le radicant est un carré parfait (1, 4, 9, 16, 25,...), sa racine carrée est un entier positif :

$\sqrt{169} = 13$; $\sqrt{225} = 15$

Si le radicant n'est un carré parfait, sa racine carrée est un nombre décimal illimité non périodique (calculette) que tu peux encadrer :

Approximation

$\boxed{\text{A l'unité près}}$:

$12 < \sqrt{150} < 13$ ($\sqrt{144} < \sqrt{150} < \sqrt{169}$)

Au dixième près :

$12,2 < \sqrt{150} < 12,3$

Valeurs approchées par défaut

Valeurs approchées par excès

2) Pour simplifier une racine carrée ?

$\sqrt{45} = \sqrt{9.5} = \sqrt{9}.\sqrt{5} = 3.\sqrt{5}$

3) Pour additionner (soustraire) des racines carrées ?

$\sqrt{45} + \sqrt{27} - 3\sqrt{20} + \sqrt{12}$

$= \sqrt{9.5} + \sqrt{9.3} - 3\sqrt{4.5} + \sqrt{4.3}$

$= 3.\sqrt{5} + 3.\sqrt{3} - 3.2\sqrt{5} + 2.\sqrt{3}$

4) Pour multiplier des racines carrées ?

$\sqrt{45}.3\sqrt{20}.\sqrt{12}.\sqrt{2} = 7\sqrt{9.5}.3\sqrt{4.5}.\sqrt{4.3}.\sqrt{2}$

$= 3\sqrt{5}.3.2\sqrt{5}.2\sqrt{3}.\sqrt{2}$

$= 3.3.2.2.(\sqrt{5})^2.\sqrt{3}.\sqrt{2}$

$= 36.5.\sqrt{6}$

$= 180\sqrt{6}$

5) Pour rendre rationnel un dénominateur ?

$\frac{2}{5\sqrt{3}} = \frac{2}{5\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{5.3} = \frac{2\sqrt{3}}{15}$ (un seul terme au dénominateur)

$\frac{3}{\sqrt{5}-1} = \frac{3}{\sqrt{5}-1}.\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{3.(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{3.(\sqrt{5}+1)}{4}$ (deux termes au dénominateur)

EXERCICES

Voir fascicule d'exercices pour les exercices « systématiques ».

1) ***Vrai*** ou ***Faux***. Justifie dans chaque cas.

a) $\sqrt{40}=20$	V – F	b) $\sqrt{36+64}=6+8$	V – F
c) $\sqrt{0{,}25}=0{,}5$	V – F	d) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=1$	V – F
e) $\sqrt{0{,}9}=0{,}3$	V – F	f) $\sqrt{12}=4\sqrt{3}$	V – F
g) $\sqrt{0}$ ***n'existe pas***	V – F	h) $\sqrt{3-\pi}$ *n'existe pas*	V – F
i) $\sqrt{25-9}=5-3$	V – F	j) $\sqrt{8}.\sqrt{2}=4$	V – F
k) $\sqrt{(-4)^2}=-4$	V – F	l) $\sqrt{-64.(-81)}=8.9$	V – F
m) L'équation x^2 - 16 = 0 admet 2 solutions	V – F	n) $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}=4$	V – F

2) Soit l'expression $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$. Calcule f(0), f($\sqrt{5}$) et f(- $\sqrt{5}$).

3) Calcule l'aire, le périmètre et la longueur des diagonales du rectangle dont la longueur vaut $\sqrt{2}+\sqrt{12}$ et la largeur $\sqrt{48}-\sqrt{18}$.

4) Soit deux triangles dont on connaît les dimensions des côtés de l'angle droit :

Triangle 1 : $\sqrt{5}-1$ ***et*** $\sqrt{5}+1$

Triangle 2 : $2+\sqrt{2}$ ***et*** $2-\sqrt{2}$

- ✓ Ces deux triangles ont-ils l'hypoténuse de même longueur ?
- ✓ Lequel a la plus grande aire ?
- ✓ Lequel a le plus petit périmètre ?

5) ***L'énigme du chapitre***

Découvre le mot caché connaissant les renseignements ci-dessous. Il suffira de remplacer chaque nombre trouvé par la lettre correspondante dans l'alphabet en respectant la règle : A = 0 ; B = 1 ; C = 2 ; etc.

$\left(3-2\sqrt{2}\right)^2+12\sqrt{2}$	$4\sqrt{7}+2\sqrt{63}-5\sqrt{28}$	$\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^4}{3}$	Valeur approchée par excès de $\sqrt{59}$	$\left(3+\sqrt{7}\right)\left(3-\sqrt{7}\right)$	Valeur de x dans 6.x = 0	$\left(\sqrt{99}-\sqrt{44}\right)^2$

SYNTHÈSE : LES RADICAUX D'INDICE 3

8. DEFINITION ET VOCABULAIRE

Que signifie $\sqrt[3]{a}$ (« a » est un nombre quelconque) ?

La racine cubique de *a* est le nombre dont le cube vaut *a*.
Elle se note $\sqrt[3]{a}$.

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a \text{ ou encore } \sqrt{a}.\sqrt{a}.\sqrt{a} = a$$

Exemples :

$\sqrt[3]{27} = 3$ car $3^3 = 27$

$\sqrt[3]{125} =$ car ....

$\sqrt[3]{-27} =$ ... car ....

$\sqrt[3]{1} =$ car ....

$\sqrt[3]{0} =$ ... car ....

$\sqrt[3]{-1} =$... car ....

$\sqrt[3]{0,001} =$ ... car ....

$\sqrt[3]{64000} =$ ... car ....

9. PROPRIETES

Par analogie avec les propriétés des racines carrées, nous avons :

10. RACINE CUBIQUE D'UN PRODUIT

Exemple :

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{8.27} &= \sqrt[3]{8}.\sqrt[3]{27}\\ &= 2.3\\ &= 6\end{aligned}$$

La racine cubique d'un produit de deux nombres est égale au produit des racines cubiques de ces deux nombres.

$$\forall\, a, b \in R : \sqrt[3]{a.b} = \sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}$$

11. RACINE CUBIQUE D'UN QUOTIENT

Exemple :

$$\sqrt[3]{\frac{-27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{-27}}{\sqrt[3]{8}}$$
$$= \frac{-3}{2}$$

La racine cubique d'un quotient de deux nombres (le deuxième étant différent de zéro) est égale au quotient des racines cubiques de ces deux nombres.

$$\forall\, a \in \mathbb{R}\,;\ \forall\, b \in \mathbb{R}_0 : \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

12. RACINE CUBIQUE D'UNE SOMME (OU D'UNE DIFFERENCE)

On aurait envie de prolonger ces deux règles à la racine cubique d'une somme.

Prenons un exemple :

$\sqrt[3]{35} \approx 3{,}27$ mais

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{35} &= \sqrt[3]{27+8}\\ &\neq \sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{8}\\ &= 3+2\\ &= 5\end{aligned}$$

Il n'existe aucun résultat général qui transforme l'écriture de la racine cubique d'une somme ou d'une différence.

⚠ $$\sqrt[3]{a+b} \neq \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$$ ⚠

13. EXERCICES

a) Calcule lorsque c'est possible et donne, s'il y a lieu, le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

1] $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} =$

2] $\sqrt[3]{\frac{1}{3}} . \sqrt[3]{\frac{1}{9}} =$

3] $\sqrt[3]{\frac{-64}{125}} =$

4] $\sqrt[3]{\frac{128}{250}} =$

5] $\sqrt[3]{\frac{128}{54}} =$

6] $\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{-4} =$

7] $\sqrt[3]{-5}.\sqrt[3]{25} =$

8] $\sqrt[3]{\frac{9}{25}}.\sqrt[3]{\frac{3}{5}} =$

9] $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}.\sqrt[3]{\frac{1}{9}}.\sqrt[3]{\frac{1}{27}} =$

10] $\sqrt[3]{6^3} =$

b) Calculer lorsque c'est possible et donner, s'il y a lieu, le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

1] $\sqrt[3]{3^4}.\sqrt[3]{3^8} =$

2] $\frac{\sqrt[3]{3^4}}{\sqrt[3]{3}} =$

3] $\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt{4}} =$

4] $\sqrt[3]{\frac{2}{5}}.\sqrt[3]{\frac{1}{50}} =$

5] $\sqrt[3]{10}.\sqrt[3]{100} =$

6] $\frac{1}{3}.\sqrt[3]{8.27} - (2,5)^2 : 100 =$

7] $\sqrt[3]{10^6} + (0,1)^2 =$

8] $\sqrt[3]{\frac{-27}{8}} + 0,3 =$

Collège Saint-Barthélemy
Y. Michiels
Mathématique – Troisième année