Collège Saint-Barthélemy
Y. Michiels

Mathématique – Troisième année

UAA2 – Triangle Rectangle

Trigonométrie du triangle rectangle

OBJECTIFS – UAA2 : Le triangle rectangle

Connaitre

- Connaître, choisir la formule adéquate pour calculer la mesure d'un angle ou d'un côté d'un triangle rectangle.
- Etablir les nombres trigonométriques dans les triangles rectangles particuliers (30 – 45 et 60 degrés).

Appliquer

- Utiliser la calculatrice pour déterminer un nombre trigonométrique d'un angle aigu ou déterminer un angle aigu à partir d'un de ses nombres trigonométriques.

Transférer

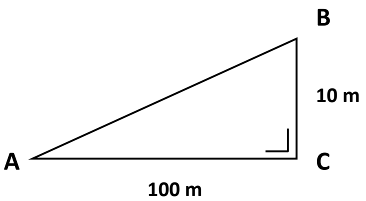
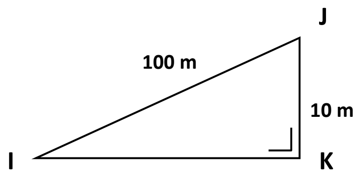
- Faire un schéma relatif à une situation et y reporter les données et les inconnues.
- Choisir et utiliser les propriétés adéquates (relation de Pythagore, propriété dite « de Thalès », nombres trigonométriques) pour résoudre un problème de topographie, calculer une distance inaccessible, déterminer un angle de vision,…

EXPLORATION : TRIGONOMETRIE DU TRIANGLE RECTANGLE

1. Deux théories s'affrontent face à ce panneau qui signifie que sur une distance de 100m, la route s'élève de 10m :

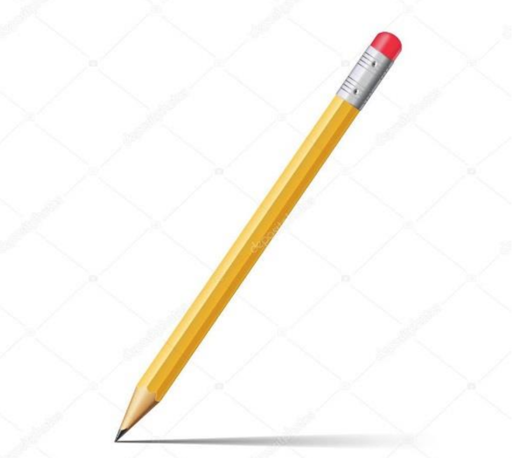
- certains disent que il faut avancer horizontalement d'une distance de 100m et monter verticalement de 10m ;
- d'autres affirment qu'il faut parcourir les 100m sur la route pour se retrouver 10m plus haut.

Voici les schémas décrivant ces deux manières de voir les choses :

Méthode 1 - Pente	Méthode 2 - Inclinaison
	

Quelle est la route la plus inclinée ? (Que signifie la plus inclinée ?) Explique par un calcul.

2. Prends un crayon et place-le de façon à ce que son ombre au sol fasse $\frac{3}{4}$ de sa longueur. Mesure l'angle que le crayon fait avec l'horizontale. Recommence avec un pic de « brochette », un manche de ballet,… Que constates-tu ?



Collège Saint-Barthélemy
Y. Michiels
Mathématique – Troisième année

3. Représente schématiquement et à l'échelle (que tu choisis) toutes les situations suivantes sur du papier transparent. Essaie ensuite de les grouper en fonction de la pente qu'elles décrivent. Vérifie à l'aide des transparents.

1] Sur 50 m de sentier rectiligne, la dénivellation est de 10 m.

2] Dans un repère cartésien, on donne les points X (-1 ; -1) ; Y (3 ; 2) et Z (3 ; -1). Quelle est la pente de la droite XY ?

3] Cette droite fait un angle de 11,5° avec l'horizontale.

4] La voiture de M.Michiels munie de pneus à clous a gravi une route faisant 30° avec l'horizontale.

5] Les côtés de l'angle droit d'un triangle mesurent 3 cm et 2,25 cm.

6] Une planche de 7,5 m posée sur un mur fait une ombre de 6 m au sol quand le soleil est à la verticale.

7] Si je me déplace de 866 m horizontalement, je m'élève de 500 m verticalement.

8] Dans un triangle rectangle, un des côtés de l'angle droit mesure 1,5 cm alors que l'hypoténuse vaut 7,5 cm.

9] Une côte très dure du Tour de France VTT a une longueur de 1,25 km et passe de 1250 m à 1500 m d'altitude.

10] Le versant d'un toit mesure 12,5 m et s'élève d'une hauteur de 6,25 m par rapport au mur sur lequel il repose.

11] Dans un repère cartésien, on donne les points A (2 ; 1) ; B (4 ; $\frac{5}{2}$) et C (4 ; 1). Quelle est la pente de la droite AB ?

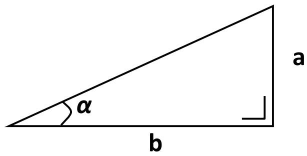
4. Représente une pente « mathématique » de 10%, 20%, 30%, 40%,… A quels angles correspondent de telles pentes ? Mesure et calcule.

5. Tu viens de travailler avec des familles de triangles rectangles semblables. Dans chacune de ces familles, les angles qui se correspondent ont la même amplitude et ***les rapports des côtés de l'angle droit (pente) ne dépendent pas de la taille du triangle choisi.*** Il existe dont un lien entre la mesure d'un angle aigu d'un triangle rectangle et le rapport des côtés de l'angle droit.

Pente « Mathématique » :

- **Ce rapport entre la longueur du côté opposé et la longueur du côté adjacent d'un angle aigu d'un triangle rectangle portera le nom de tangente de cet angle** :

$$\boxed{Tg\ \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{a}{b}}$$

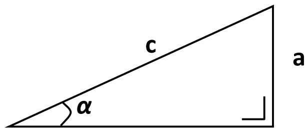


D'une manière analogue, tu peux montrer que les rapports d'un côté de l'angle droit à l'hypoténuse ne dépendent pas non plus de la taille. Nous définirons ainsi deux autres rapports :

Inclinaison - Pente « Réelle » :

- **Le rapport entre la longueur du côté opposé d'un angle aigu d'un triangle rectangle et son hypoténuse portera le nom de sinus de cet angle** .

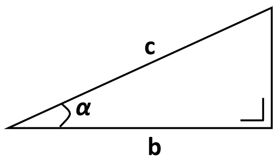
$$\boxed{Sin\ \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{a}{c}}$$



Rapport de projection orthogonale :

- **Le rapport entre la longueur du côté adjacent d'un angle aigu d'un triangle rectangle et son hypoténuse portera le nom de cosinus de cet angle** .

$$\boxed{Cos\ \alpha = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{b}{c}}$$



Dessine un angle de 45° :

- Détermine, grâce à des mesures, les valeurs de cos 45° ; sin 45° et Tg 45°.
- Vérifie à la calculette les rapports que tu as trouvés.

Dessine ensuite un angle de 30° et un de 60°

- Détermine, grâce à des mesures, les nombres trigonométriques de 30° et 60°.
- Vérifie à la calculette les rapports que tu as trouvés.

6. Opposé – Adjacent – Hypoténuse[1]

ENTOURE, dans la liste suivante, les mots qui te semblent être synonymes du terme « Opposé ».

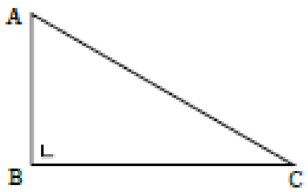
Vis-à-vis	Contigu
Attenant	Inverse
Identique	Contraire
Voisin	Côte à côte
Collé	En contact
Proche	Éloigné

ENTOURE, dans la liste suivante, les mots qui te semblent être synonymes du terme « Adjacent ».

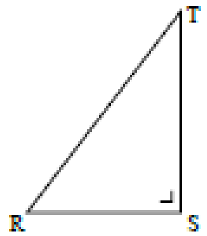
Avoisinant	À côté de
À l'écart	Proche
Attenant	Distant
Voisin	Côte à côte
Collé	En contact
Contigu	Éloigné

Dans les triangles rectangles suivants, **DÉTERMINE** le côté opposé à

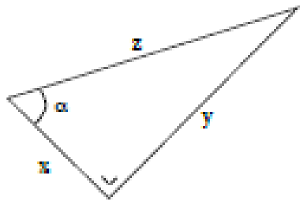
l'angle $\hat{A}$:



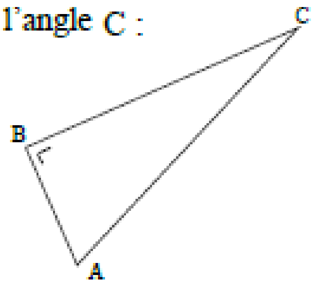
l'angle $\widehat{RTS}$:



l'angle α :

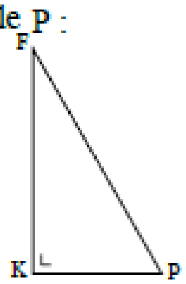


l'angle $\hat{C}$:

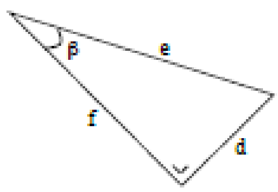


Dans les triangles rectangles suivants, **DÉTERMINE** le côté adjacent à

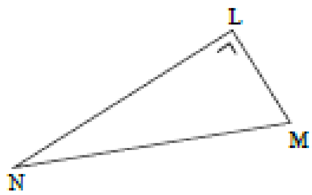
l'angle $\hat{P}$:



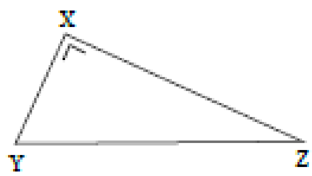
l'angle β :



l'angle $\widehat{LMN}$:



l'angle $\hat{Z}$:

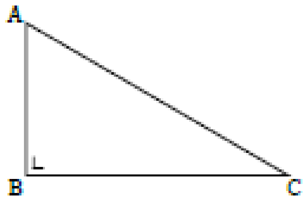


Dans les triangles rectangles suivants, **DÉTERMINE**

l'hypoténuse :

le côté opposé à $\hat{C}$:

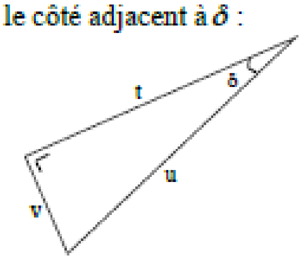
le côté adjacent à $\hat{C}$:



l'hypoténuse :

le côté opposé à δ :

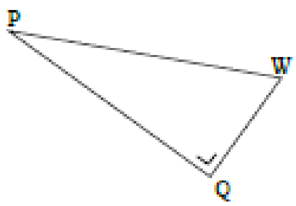
le côté adjacent à δ :



l'hypoténuse :

le côté opposé à $\hat{W}$:

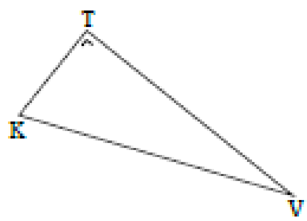
le côté adjacent à $\hat{W}$:



l'hypoténuse :

le côté opposé à $\widehat{TVK}$:

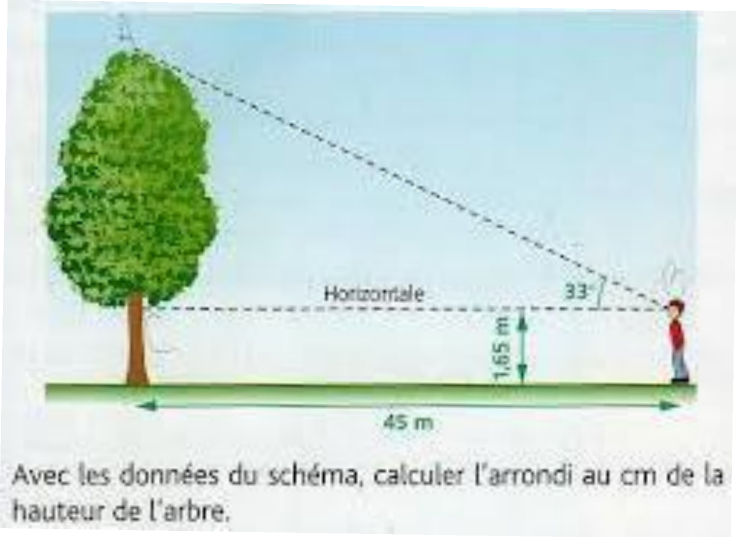
le côté adjacent à $\widehat{TVK}$:



[1] Evaluation non certificative – 2014 – Pistes didactiques – Fédération WB : Enseignement.be

7. **Hauteur d'un arbre**

Avec les données du schéma, calcule la hauteur de l'arbre.



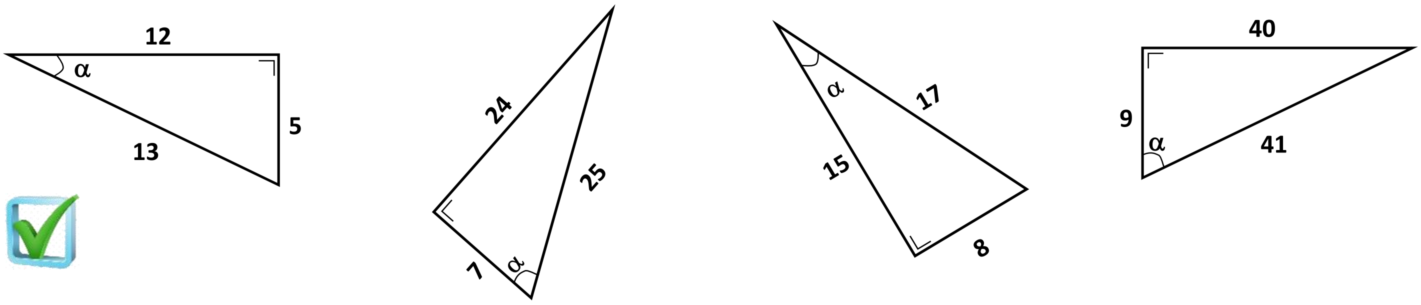
8. A quelle hauteur se situe un cerf-volant tenu par un enfant mesurant 1m60 (hauteur de la main qui tient la ficelle) si la ficelle qui le retient mesure 32m et qu'elle forme un angle de 70° avec le sol (horizontal).

9. Sachant que le cosinus de l'angle α est de $\frac{5}{6}$, ***construis*** l'angle α. ***Mesure*** ensuite cet angle et vérifie à l'aide de la calculette la précision de ton dessin en ***calculant*** l'amplitude de α.

10. Isole « x » dans les situations suivantes :

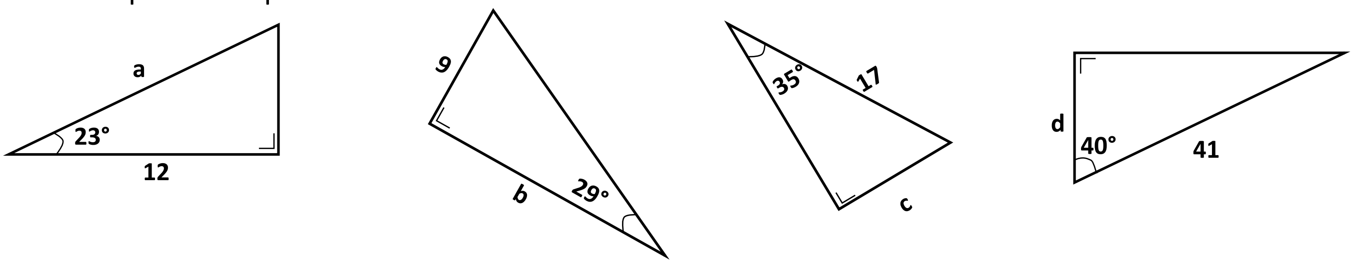
a.x = b	$\frac{x}{a} = b$ (a ≠ 0)	$\frac{a}{x} = b$ (x ≠ 0)

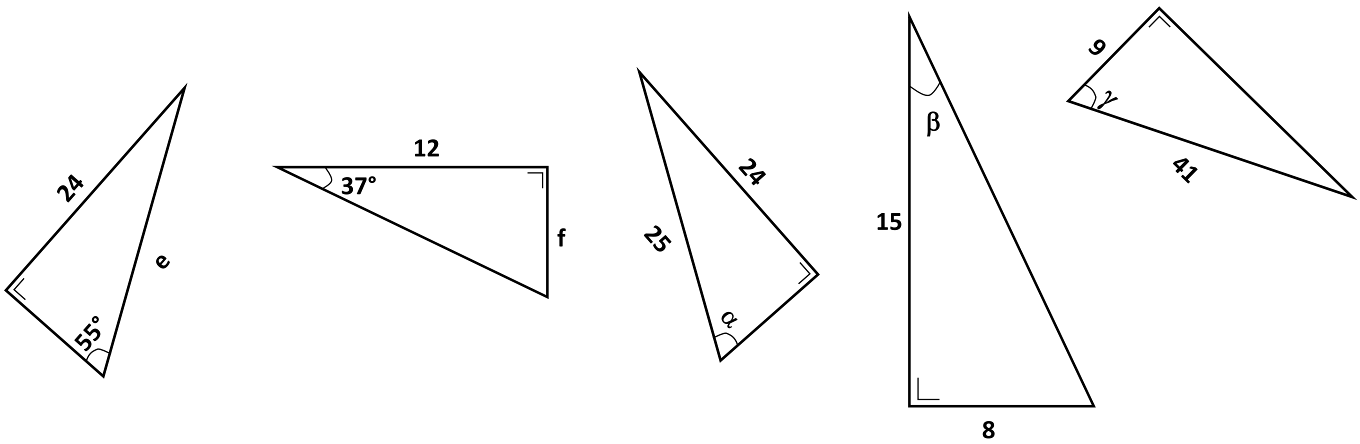
11. Ecris sous forme de fractions les valeurs de $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ et $\tan\alpha$.



$\sin\alpha$ =	$\sin\alpha$ =	$\sin\alpha$ =	$\sin\alpha$ =
$\cos\alpha$ =	$\cos\alpha$ =	$\cos\alpha$ =	$\cos\alpha$ =
$\tan\alpha$ =	$\tan\alpha$ =	$\tan\alpha$ =	$\tan\alpha$ =

12. Calcule la longueur des côtés (au millimètre près) ou l'amplitude de l'angle (en ° ' ") représentés par une lettre.





13. Calcule l'amplitude de l'angle γ, angle aigu d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure 9 cm et le côté adjacent à cet angle 7 cm.

14. A quel pourcentage correspond une pente de 45° ? Et une pente de 30° (**Aide** : pense aux triangles équilatéraux) ? De 60° ?

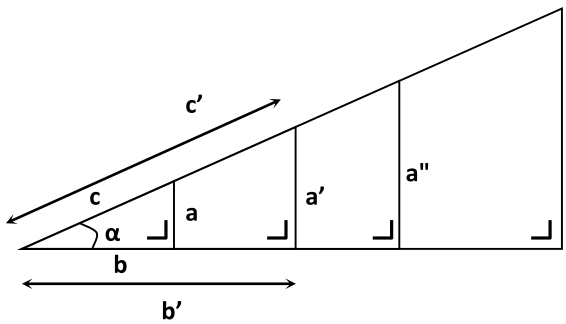
SYNTHÈSE : TRIGONOMETRIE DU TRIANGLE RECTANGLE

1. INTRODUCTION

Le mot « trigonométrie », d'origine grecque, peut être décomposé en trois parties : « tri » pour « trois », « gonon » pour angle et « métrie » pour mesure. Bien que les Babyloniens et les Egyptiens se soient occupés de la mesure des triangles, l'étude de la trigonométrie débute au IIIème siècle avant J-C dans l'école grecque d'Alexandrie et permettra de mieux comprendre les repères sur Terre et dans le ciel et développer ainsi l'astronomie et la navigation : Aristarque évalue les distances de la Lune et du Soleil à la Terre.
La trigonométrie est utile pour calculer des distances inaccessibles au moyen de mesures de longueurs et d'angles dans un triangle.

2. TRIANGLES RECTANGLES SEMBLABLES

Tous les triangles rectangles qui ont un angle aigu de même amplitude sont semblables puisqu'ils ont deux angles respectivement de même amplitude (voir triangles semblables).
Nous pouvons donc les disposer comme dans la figure ci-dessous :



Comme les *triangles sont semblables*, nous pouvons écrire :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \text{ ou } \frac{a'}{a''} = \frac{b'}{b''} = \frac{c'}{c''} \text{ ou …}$$

En transformant ces proportions pour en obtenir d'autres (comment ?), nous pouvons écrire les séries de proportions suivantes :

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots \text{ ou } \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} = \frac{a''}{c''} = \ldots \text{ ou } \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} = \frac{b''}{c''} = \ldots \text{ ou…}$$

3. NOMBRES TRIGONOMETRIQUES D'UN ANGLE AIGU

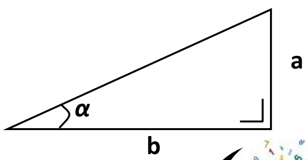
Reprenons les égalités de rapport une à une :

3.1. Tangente d'un angle aigu

Les rapports de la longueur du côté opposé à l'angle aigu ***α*** à la longueur du côté adjacent à cet angle est le même pour tous les triangles rectangles semblables. Il est indépendant de leur taille et ne varie qu'en fonction de l'amplitude de l'angle aigu.

Nous appellerons ce rapport « ***la tangente de l'angle aigu*** » et nous le noterons par le symbole ***Tan α***

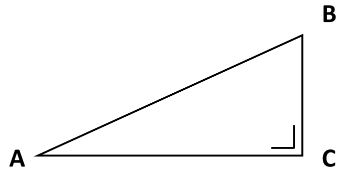
$$\boxed{\text{Tan}\,\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{a}{b}}$$



A partir du triangle rectangle suivant, exprime par un rapport de longueur la valeur de :

$\tan \hat{A}° = \_\_\_$

$\text{tg}\,\hat{B}° = \_\_\_$



Ce rapport permet de calculer des hauteurs inaccessibles à partir de mesures horizontales ; il donne aussi le **coefficient de forme des rectangles** semblables formés à partir de ces triangles rectangles.

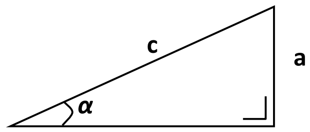
Ce rapport correspond aussi à la **pente du segment de droite [AB]** quand le segment de droite [AC] est horizontal.

3.2. Sinus d'un angle aigu

Les rapports de la longueur du côté opposé à l'angle aigu ***α*** à la longueur de l'hypoténuse est le même pour tous les triangles rectangles semblables. Il est indépendant de leur taille et ne varie qu'en fonction de l'amplitude de l'angle aigu.

Nous appellerons ce rapport « ***le sinus de l'angle aigu*** » et nous le noterons par le symbole ***Sin α***

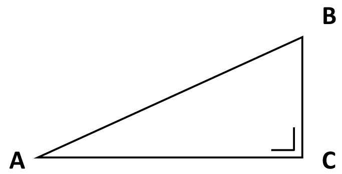
$$\boxed{\text{Sin}\,\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{a}{c}}$$



A partir du triangle rectangle suivant, exprime par un rapport de longueur la valeur de :

$\sin \hat{A}° = \_\_\_$

$\sin \hat{B}° = \_\_\_$

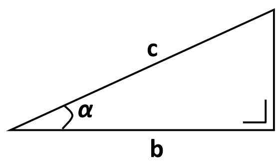


3.3. Cosinus d'un angle aigu

Les rapports de la longueur du côté adjacent à l'angle aigu ***α*** à la longueur de l'hypoténuse est le même pour tous les triangles rectangles semblables. Il est indépendant de leur taille et ne varie qu'en fonction de l'amplitude de l'angle aigu.

Nous appellerons ce rapport « ***le cosinus de l'angle aigu*** » et nous le noterons par le symbole ***Cos α***

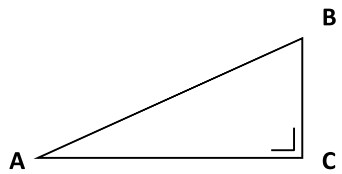
$$\boxed{\text{Cos}\,\alpha = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{b}{c}}$$



A partir du triangle rectangle suivant, exprime par un rapport de longueur la valeur de :

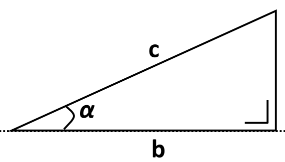
$\cos \hat{A}° = \_\_\_$

$\cos \hat{B}° = \_\_\_$



Le cosinus d'un angle aigu permet de trouver **la longueur de la projection orthogonale d'un segment sur une direction donnée** :

b = c.cos *α*



4. RELATION ENTRE SINUS ET COSINUS

En observant les égalités notées aux points 3.2. et 3.3., nous constatons que :

$$\sin \hat{A}° = \underline{\qquad} = \cos \hat{B}°$$

Or, ces deux angles aigus sont **complémentaires**.

Donc, $\sin \hat{A}° = \cos \hat{B}°$

$\qquad\qquad = \cos (90° - \hat{A}°)$

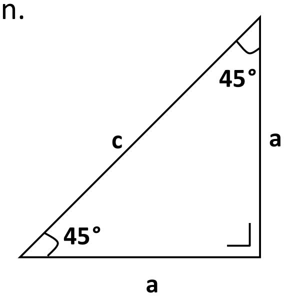
Le sinus d'un angle est égal au cosinus de son complémentaire (et vice-versa)

5. NOMBRES TRIGONOMETRIQUES D'ANGLES PARTICULIERS

Les nombres trigonométriques associés aux angles de 30°, 45° et 60° peuvent se calculer à partir de triangles rectangles particuliers

5.1. Nombres trigonométriques de 45°

Si un triangle rectangle est isocèle, ses deux angles aigus mesurent 45° chacun.



Par le théorème de Pythagore, nous pouvons écrire :

$$a^2 + a^2 = c^2$$

Donc $\qquad 2a^2 = c^2$

Nous en déduisons la relation :

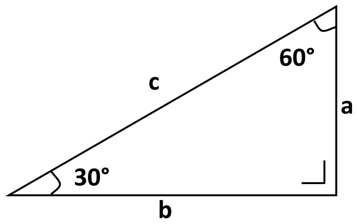
$$c = \sqrt{2}\, a$$

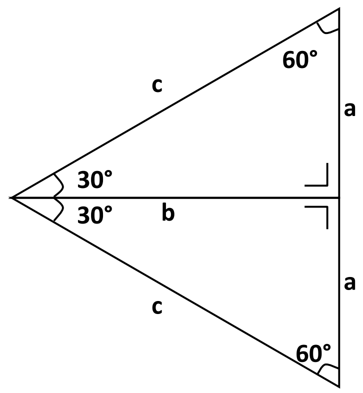
Calculons les nombres trigonométriques pour 45° :

Sin 45°	Cos 45°	Tg 45°
$\sin 45° = \frac{a}{c}$ $= \frac{a}{\sqrt{2}a}$ $= \frac{1}{\sqrt{2}}$ $= \frac{1.\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}$ $= \frac{\sqrt{2}}{2}$	De même : $\cos 45° = \frac{a}{c}$ $= \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\text{tg}\, 45° = \frac{a}{a} = 1$

5.2. Nombres trigonométriques de 30° et 60°

Dans un triangle rectangle, si un des angles aigus mesure 30°, l'autre a une amplitude de 60°.





En construisant le symétrique du triangle, nous obtenons un triangle équilatéral puisque les trois angles mesurent 60°.
Donc :

$$c = 2a$$

En appliquant le théorème de Pythagore dans chaque triangle rectangle, nous obtenons :

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Comme c = 2a

$$4a^2 = a^2 + b^2$$

Nous pouvons alors déterminer la valeur de « b » :

$$b^2 = 3a^2 \qquad \text{et} \qquad b = \sqrt{3}\,a$$

Calculons les nombres trigonométriques pour 30° :

Sin 30°	Cos 30°	Tg 30°
$\sin 30° = \frac{a}{c} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$	$\cos 30° = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}.a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\text{tg}\, 30° = \frac{a}{b} = \frac{a}{\sqrt{3}.a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Par la relation définie au point 4., nous avons :

cos 60° = sin 30° = $\mathbf{\frac{1}{2}}$	**sin 60° = cos 30° =** $\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$	$\text{tg}\, 60° = \frac{\sin 60°}{\cos 60°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

Le tableau suivant reprend les nombres trigonométriques des angles de 30°, 45° et 60°. En imaginant des « triangles extrêmes » essaie de compléter les colonnes pour 0° et 90°.

Angles	0°	30°	45°	60°	90°
Sinus					
Cosinus					
Tangente					

Remarque :

Comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle est toujours plus grande qu'un côté de l'angle droit, nous avons toujours :

$$a < c \Rightarrow \frac{a}{c} < 1 \qquad \text{et} \qquad b < c \Rightarrow \frac{b}{c} < 1$$

De plus, ces rapports sont positifs puisqu'il s'agit de rapport de longueurs. Donc :

$$0 < \frac{a}{c} < 1 \qquad \text{et} \qquad 0 < \frac{b}{c} < 1$$

Dans un *triangle rectangle*, pour *tout angle aigu α*, nous avons :

$$\mathbf{0 < \sin \alpha < 1}$$

$$\mathbf{0 < \cos \alpha < 1}$$

6. APPLICATIONS SIMPLES ET UTILISATION DE LA CALCULETTE

1] Sur une feuille annexée, en te servant des définitions de cos α, sin α et tg α, construis un angle α sachant que (puis mesure-le) :

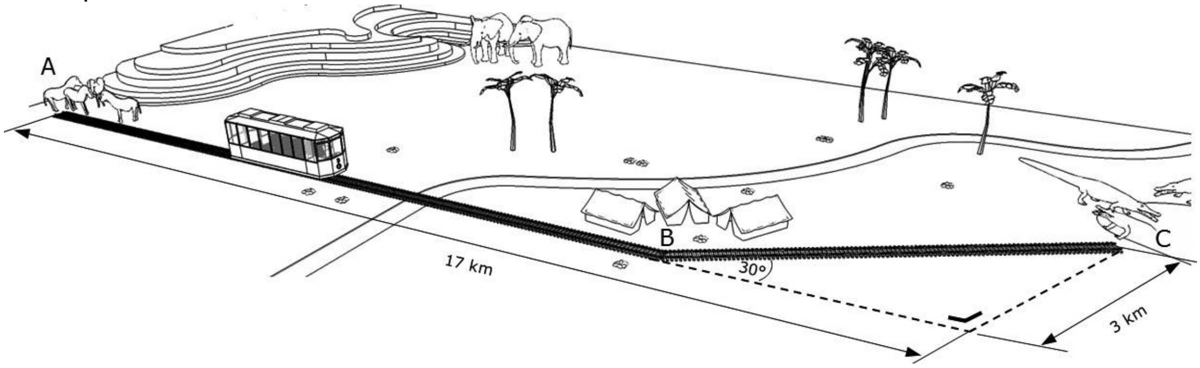
a) $\cos \alpha° = \frac{3}{4}$ — $\alpha° \approx$	b) $\sin \alpha° = 0{,}5$ — $\alpha° \approx$	c) $\text{tg } \alpha° = 3{,}4$ — $\alpha° \approx$	d) $\cos \alpha° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ — $\alpha° \approx$
e) $\sin \alpha° = 2$ — $\alpha° \approx$	f) $\cos \alpha° = \frac{14}{15}$ — $\alpha° \approx$	g) $\text{tg } \alpha° = 0$ — $\alpha° \approx$	h) $\sin \alpha° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ — $\alpha° \approx$
i) $\text{tg } \alpha° = \frac{2}{3}$ — $\alpha° \approx$	j) $\cos \alpha° = \frac{7}{5}$ — $\alpha° \approx$	k) $\sin \alpha° = 1$ — $\alpha° \approx$	l) $\text{tg } \alpha° = \sqrt{3}$ — $\alpha° \approx$

2] Calcule à l'aide de la calculette :

a) cos 60° =	b) sin 45° =	c) cos 90° =	d) tg 30° =
e) sin 0° =	f) tg 27,27641° =	g) sin 23°26'37" =	h) cos 0° =
i) tg 90° =	j) cos 68°17'29" =	k) sin 90° =	l) sin 30° =

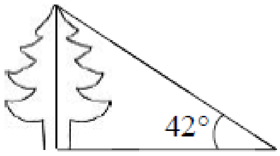
3] Comment transformer 23°26’37" en degrés décimaux. Fais-le ci-dessous.

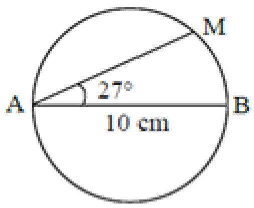
4] Au parc naturel d’Arthurville, un projet de voie ferrée est à l’étude. La voie reliera l’enclos des ânes (A), le bivouac (B) et la fosse aux crocodiles (C) comme indiqué sur le croquis ci-dessous.



Détermine la longueur de la voie ferrée (donne la valeur arrondie au dixième de km près). **Écris** ton raisonnement et tes calculs.

5] Le rayon solaire passant par le sommet d’un sapin forme un angle de 42° avec le sol horizontal. Quelle est la hauteur du sapin sachant que son ombre a une longueur de 33 m ?





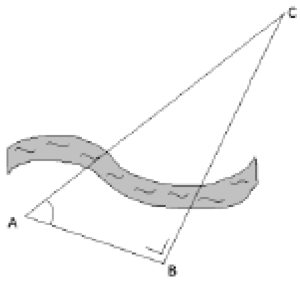
6] Calculer la longueur $\overline{MB}$.

7] Le fronton d’un temple grec a la forme d’un triangle isocèle dont la base mesure 25 m. Calcule la longueur des deux autres côtés ainsi que l’amplitude des angles à la base sachant que la hauteur relative à cette base mesure 5,2 m.

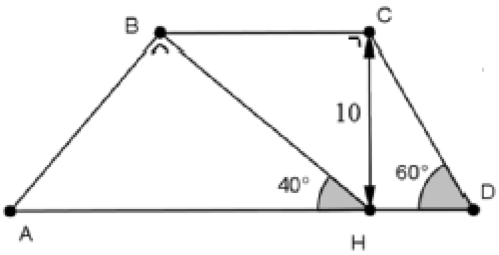
8] Un cycliste monte un col. Il démarre à une altitude de 340 m. Il monte pendant 15 km sur une route qui fait un angle de 7° avec l’horizontale. À quelle altitude arrivera-t-il au sommet ?

9] Deux immeubles se trouvent de part et d’autre d’une rue. Du bâtiment dont la hauteur vaut 240 m, on observe le sommet du second sous un angle de 25° par rapport à l’horizontale. Réalise un schéma de la situation. La hauteur du second immeuble vaut 360 m. Calcule la distance séparant ces deux immeubles.

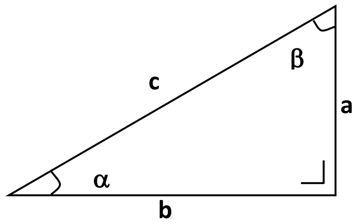
10] Une ligne à haute tension reliant les villages A et C franchit une rivière. Si tu sais que B est un angle droit, |AB| = 94 m et |BÂC| = 72°, calcule la distance séparant les deux villes.



11] En tenant compte des informations données sur le dessin, calcule la longueur des quatre côtés, le périmètre et l’aire du trapèze ABCD.



12] Complète le tableau suivant, en te basant sur la représentation et les éléments du triangle rectangle ci-contre :



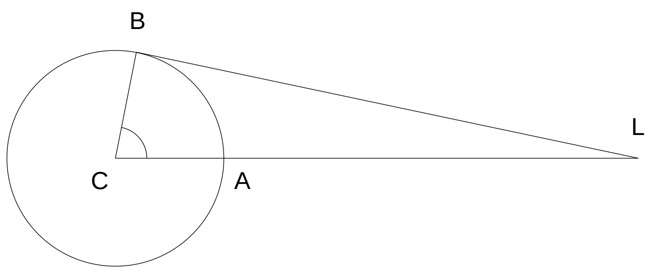
	a	b	c	α	β
Triangle 1			**14**		**30°**
Triangle 2			**18**	**45°**	
Triangle 3	**4,2**				**20°**
Triangle 4		**100**		**38,2°**	
Triangle 5	**6**	**4**			
Triangle 6		**22,5**	**36**		
Triangle 7	**4,9**		**9,8**		

13] A 37,5°, ça va bien… pour cette Audi Quattro munie de pneus à clous qui a gravi un tremplin de ski enneigé d'une inclinaison de 37,5°, ce qui représente une pente de 85% ! L'exploit fut réalisé pour les besoins d'un spot publicitaire en Finlande. *(D'après « L'action automobile et touristique », n°301)*

14] Au tour de France, les cols escaladés par les coureurs ont une pente qui varie régulièrement entre 5% et 7%. A quelles amplitudes ces pentes correspondent-elles ?

15] Le sol d'un garage d'une maison se trouve à 2m sous le rez-de-chaussée. La maison est en recul de 9m par rapport à la chaussée. Calcule l'angle formé avec le plan horizontal par la descente du garage. Détermine aussi la pente de la descente de ce garage.

16] Deux observateurs A et B, situés sur un même méridien mais à deux latitudes différentes observe la Lune. Le premier la voit à son zénith (à la verticale) pendant que l'autre voit la lune se lever à l'horizon. Estime la distance Terre-Lune sachant que la différence de latitude des deux observateurs est de 89,05° et que le rayon de la Terre mesure environ 6378 km.



<u>Aide</u> : la tangent en un point du cercle est perpendiculaire au rayon en ce point

17] Après avoir gravi un col de 6 km de long, un coureur cycliste a atteint l'altitude de 915 m alors qu'il était parti de 170 m. Quelle est la pente moyenne de cette route ? Quel angle formerait-elle avec l'horizontale si elle était rectiligne ?

18] Sachant que cos α° = 0,54, peux-tu calculer sin α et tan α ?

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES
MATH POUR RÉUSSIR : PAGES 135 À 144