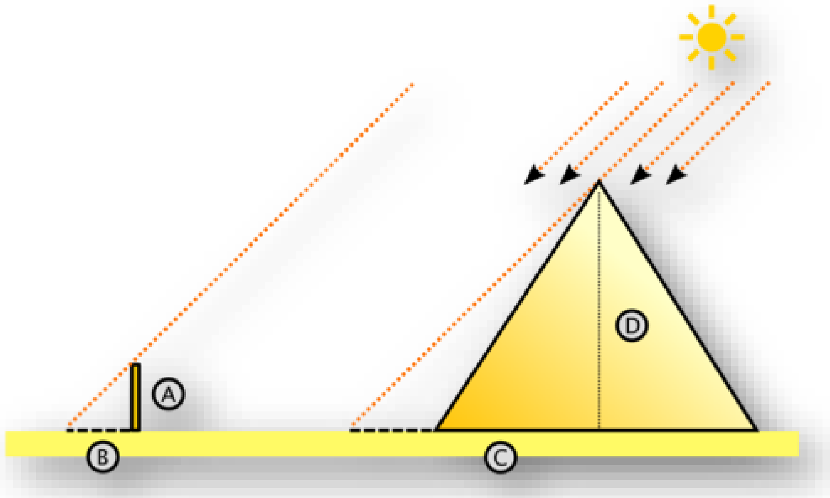
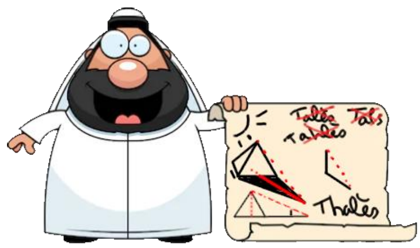
Collège Saint-Barthélemy
Y. Michiels

Mathématique – Troisième année

UAA1 – Figures isométriques et semblables





Théorème de Thalès

OBJECTIFS – UAA1 : Figures isométriques et figures semblables

Connaitre

- Reconnaître et justifier une configuration où le théorème de Thalès (ou sa réciproque) s'applique et en déduire les égalités de rapports qui en découlent.

Appliquer

- Calculer une longueur de segments à partir d'égalités de rapports.
- Partager un segment en parties égales.
- Construire une figure à partir d'égalités de rapports

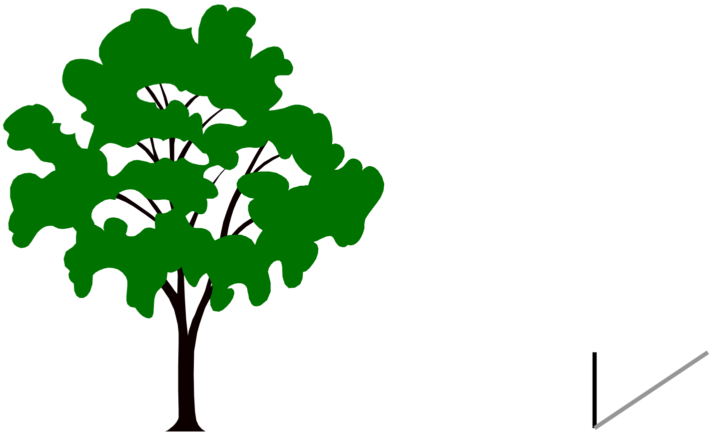
Transférer

- Résoudre un problème de construction ou de calcul en utilisant les propriétés des projections parallèles.
- Démontrer des propriétés de figures faisant appel aux propriétés des projections parallèles.

EXPLORATION : A L'OMBRE DE THALES

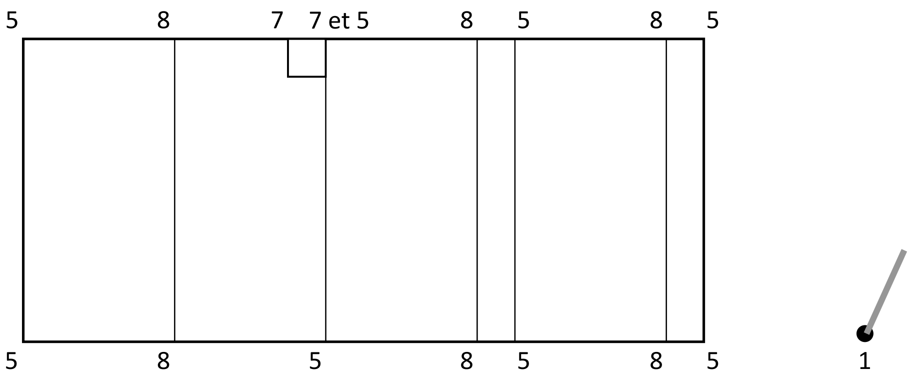
1. Un arbre proche d'une habitation devient menaçant suite à une tempête. Il faut l'abattre sans qu'il ne s'écrase sur la maison. Tu dois donc connaître sa hauteur.
En repensant à Thalès de Milet qui parvint à mesurer la hauteur d'une pyramide grâce à son ombre, on te suggère d'attendre une journée ensoleillée et de planter un bâton d'un mètre près de l'arbre.

a) Dessine l'ombre de l'arbre sachant qu'elle mesure 10,3m.
b) Calcule la hauteur de cet arbre (on suppose que le sommet de l'arbre est inaccessible).



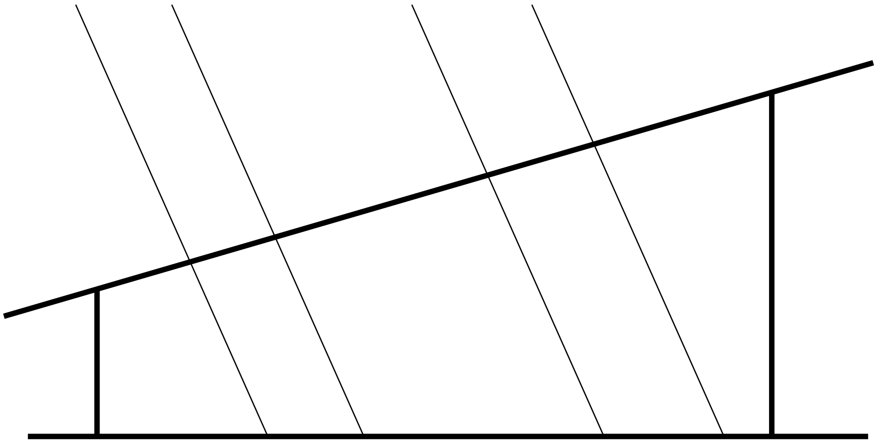
2. La figure suivante représente un bâtiment vu du dessus ; les nombres indiquent les hauteurs en mètres. A côté du bâtiment, on a représenté un bâton d'un mètre et son ombre. Sur une feuille annexée :

a) Dessine le bâtiment vu de face.
b) Reproduis ce dessin et dessine son ombre.



🕮 *Théorie sur les projections parallèles*

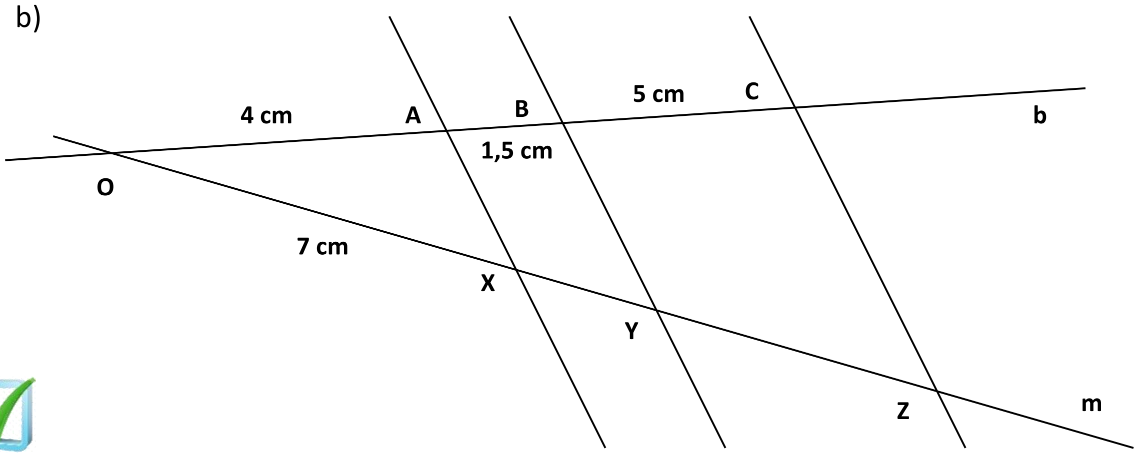
3. Les deux fenêtres d'un toit de hangar éclairent des zones de respectivement 1,5m et 1,8m de large. Sachant que la petite fenêtre mesure 1,2m, combien mesure la grande ?

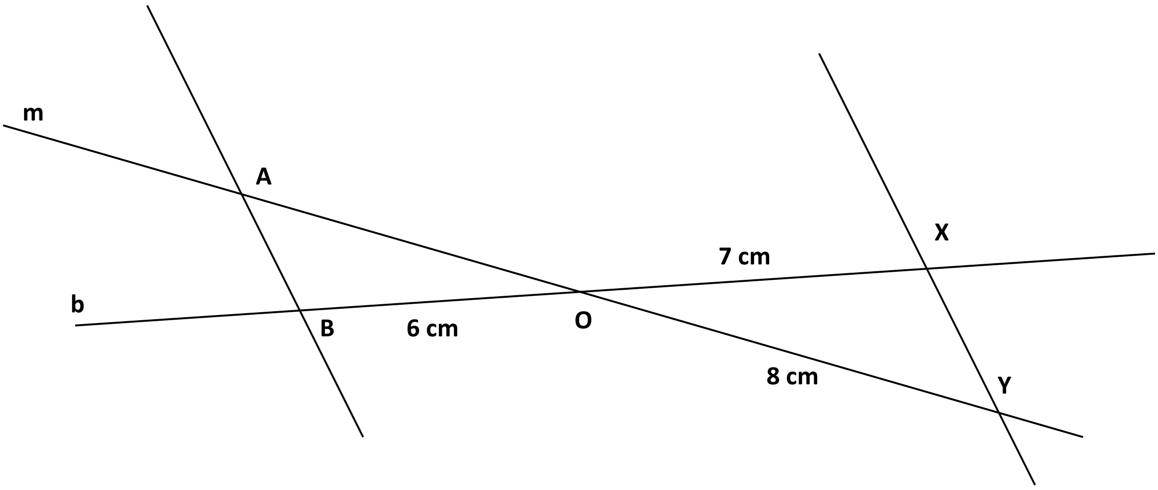


4. <u>Situations hors contexte</u>

a) Dans les réseaux de droites parallèles suivants, calcule les longueurs des segments de la droite ***b*** ou de la droite ***m*** qui sont inconnues (les dessins ne sont pas à l'échelle).

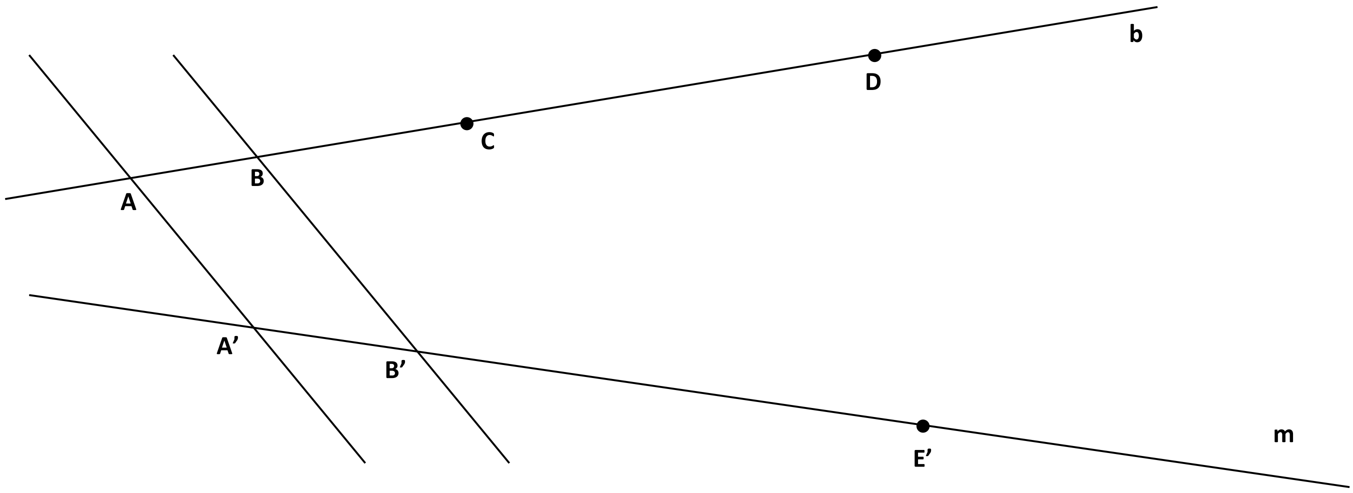
b)



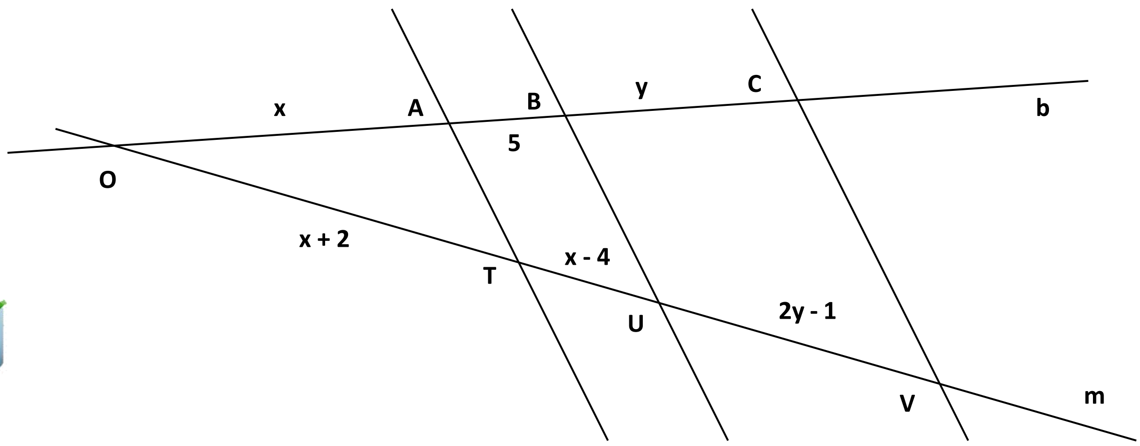


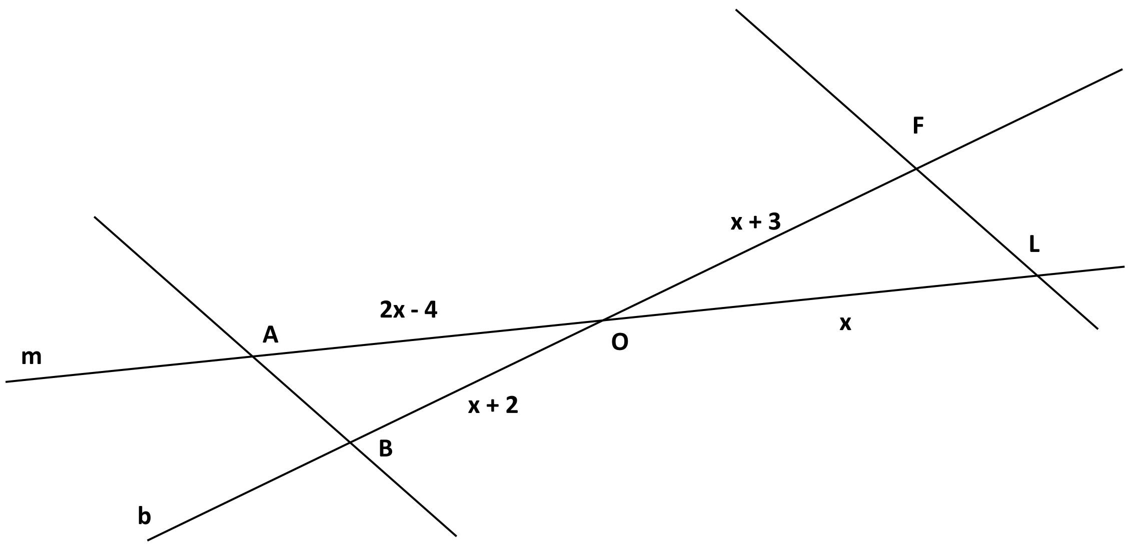
Complète le réseau de droites parallèles AA’, BB’, CC’,… Calcule les longueurs $\overline{A'C'}$, $\overline{A'D'}$ et $\overline{AE}$ sachant que :

$$\overline{AB} = 2\,\text{cm},\ \overline{AC} = 5\,\text{cm},\ \overline{AD} = 10\,\text{cm},\ \overline{A'B'} = 3\,\text{cm et } \overline{A'E'} = 9\,\text{cm}$$



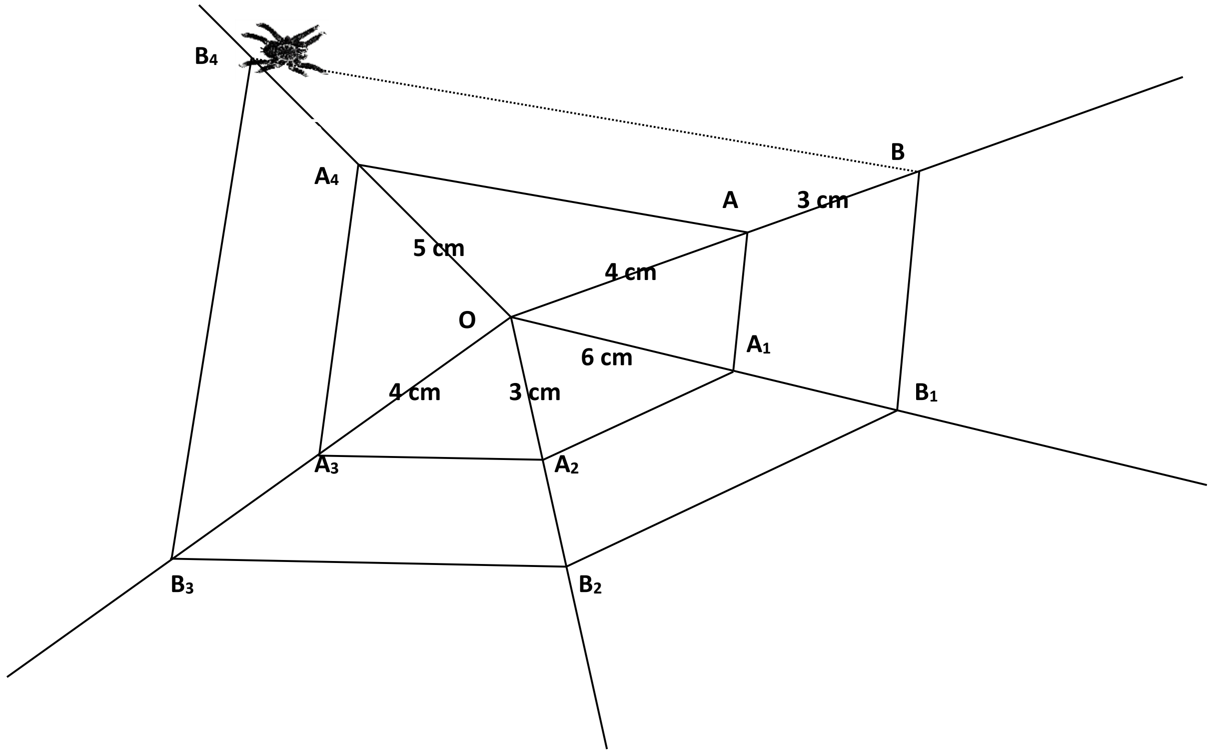
c) Calcule la valeur de x puis de y dans les réseaux de parallèles ci-dessous :





5. Approche de la réciproque du théorème de Thalès

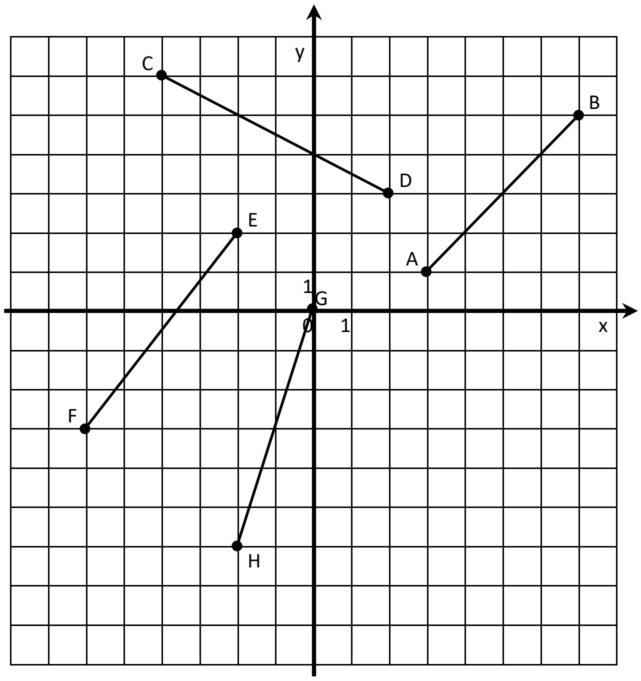
Une araignée n'a plus qu'un morceau de fil à tisser à sa toile. Jusque-là, elle est bien certaine du parallélisme de certains de ses fils. Mais pour le dernier, cela ne dépend plus de son habileté puisqu'elle est obligée de relier B_4 et B. BB_4 sera-t-elle parallèle à AA_4 ?



Essaie d'énoncer la réciproque de Thalès.

6. Milieu d'un segment

1] En utilisant le théorème de Thalès, calcule les coordonnées des milieux des segments [AB], [CD], [EF] et [GH].



2] Généralise la situation : comment calculer les coordonnées du milieu du [AB] avec A $(x_a ; y_a)$ et B $(x_b ; y_b)$?

SYNTHESE : PROJECTIONS PARALLELES OMBRES ET THALES

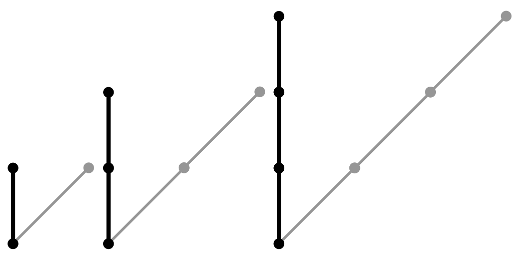
1. LES PROJECTIONS PARALLELES

1.1. Les ombres

Comme les rayons du soleil viennent d'un astre très éloigné, on peut les considérer comme parallèles. C'est pourquoi, quand un objet est exposé au soleil, tous les segments joignant chacun des points de l'objet au point de son ombre sont parallèles.

1.2. Propriétés des ombres au soleil

1) Si un bâton est placé dans la direction des rayons du soleil, son ombre est réduite à sa base.
2) Les ombres de deux bâtons parallèles entre-eux sont parallèles entre-elles. En plus :
    - Si les bâtons ont même longueur, leurs ombres ont la même longueur ;
    - Si un bâton a une longueur double de l'autre, l'ombre du 1er à une longueur



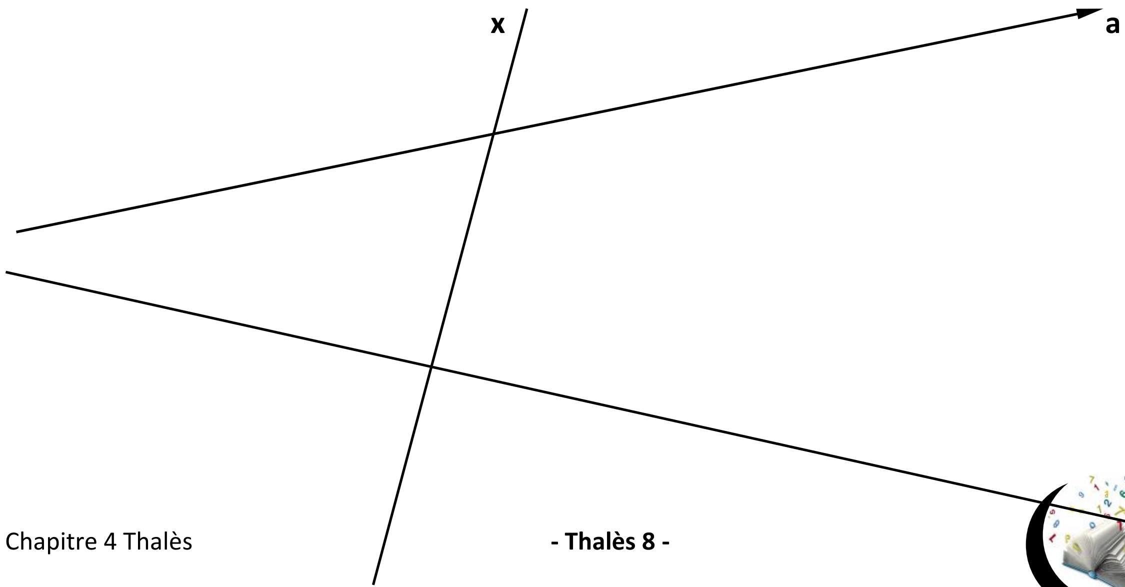
double de celle du 2ème.

1.3. Règle graduée et projection parallèle

Les propriétés des projections parallèles (des ombres) expliquées ci-dessus peuvent s'appliquer à la droite graduée.

Sur la figure ci-dessous :

1) Gradue la droite **a** avec un repère de 1 cm tel que le point dont l'abscisse est 0 appartienne à **x**. Nomme le O
2) Place les points **A, B, C, D** et **E** avec les abscisses respectives de 1 à 5 ; place les points **F, G, H, I** et **J** avec les abscisses respectives de -1 à -5.
3) Projette la droite **a** et sa graduation (-5 à 5) sur la droite **d** parallèlement à la droite **x**.



4) Sur la droite **d**, nomme les **A', B', …** les images respectives de **A, B, ….**Complète ensuite le tableau suivant

Abs **A**	=	…	Abs **A'**	=	…	Abs **F**	=	…	Abs **F'**	=	…
Abs **B**	=	…	Abs **B'**	=	…	Abs **G**	=	…	Abs **G'**	=	…
Abs **C**	=	…	Abs **C'**	=	…	Abs **H**	=	…	Abs **H'**	=	…
Abs **D**	=	…	Abs **D'**	=	…	Abs **I**	=	…	Abs **I'**	=	…
Abs **E**	=	…	Abs **E'**	=	…	Abs **J**	=	…	Abs **J'**	=	…

Conclusion :

Les projections parallèles conservent les abscisses

- Quelle est la longueur du repère de la droite graduée **d** ? .... mm
- Donne une estimation du **rapport** entre la longueur d'un segment-image quelconque *(choisis-le)* de la droite **d** et la longueur de son correspondant sur la droite **a.** ....
- Compare ce rapport avec celui obtenu par tes copains ....

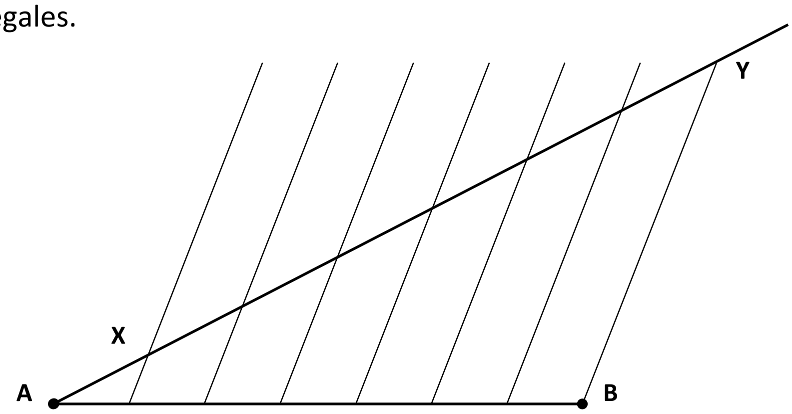
Remarque importante : si les abscisses sont conservées, les longueurs des segments ont été multipliées par un même nombre qui est le **rapport entre la longueur d'un segment-image et la longueur de son correspondant.**

1.4. Division d'un segment en parties égales

On peut utiliser la propriété précédente pour diviser un segment en parties égales. Divise, par exemple, le segment [AB] en 7 parties égales :

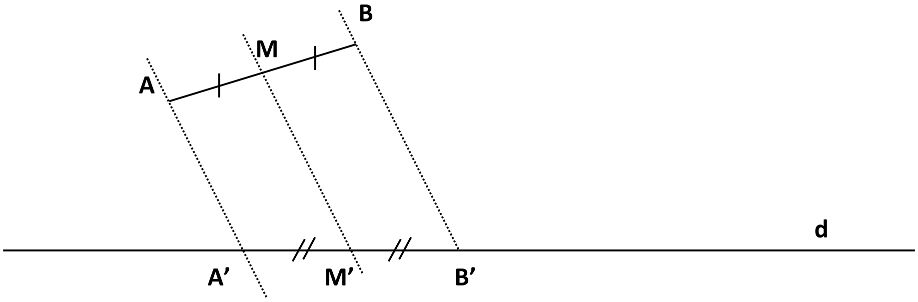
1) Trace une demi-droite d'origine A.
2) Place sur cette demi-droite un point X.
3) Reporte ce segment [AX] six fois au-delà de B.
4) Appelle Y ce dernier point. Tu obtiens ainsi une graduation de [AY].
5) Projette cette graduation sur [AB] parallèlement à la droite YB.

Compte tenu de la propriété énoncée ci-dessus, cette nouvelle graduation divise le segment [AB] en 7 parties égales.



1.5. Conservation du milieu

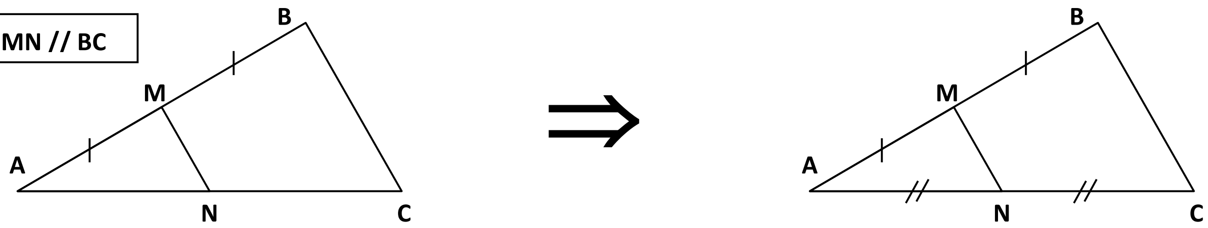
Considérons le segment **[AB]** et le point **M**, milieu de ce segment. Si on projette ce segment sur une droite **d** dans une direction quelconque, on obtient le segment **[A'B']** où **M'** (image de M) est aussi le milieu de **[A'B']** :



Toute projection parallèle conserve le milieu

Cette propriété appliquée au cas particulier des triangles porte le nom de ***<u>théorème du milieu</u>*** :

MN // BC



Dans un triangle, la droite passant par le milieu d'un côté et parallèle à un autre côté passe par le milieu du troisième côté

2. THEOREME DE THALES

Thalès vécut au VI^{è} siècle avant Jéus-Christ à Milet sur la côté d'Asie Mineure, actuellement en Turquie. Homme d'état, commerçant, ingénieur, astronome, philosophe et mathématicien, ce grand voyageur apprit des éléments d'algèbre et de géométrie des Babyloniens et des Egyptiens. Il voulait dépasser le stade des mathématiques purement empiriques et contribuer à la mise en place d'une structure dans les propriétés mathématiques. Il fait partie des fondateurs de la géométrie grecque.

On ne sait pas si Thalès est vraiment à l'origine du théorème dit « de Thalès » mais on raconte que, lors d'un de ses voyages en Egypte, il aurait calculé la hauteur d'une pyramide à partir de l'ombre au soleil.

2.1. Configurations de Thalès

Il est important de pouvoir reconnaître les configurations pour lesquelles tu peux appliquer le théorème de Thalès. Il s'agit de configurations dans lesquelles se trouvent deux droites sécantes « coupées » par au moins deux droites parallèles :

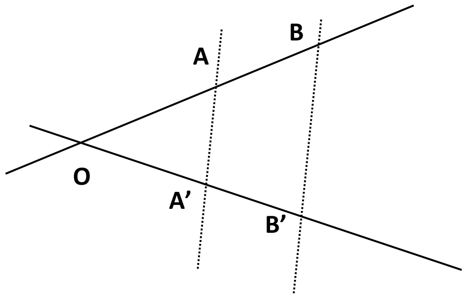


Figure 1

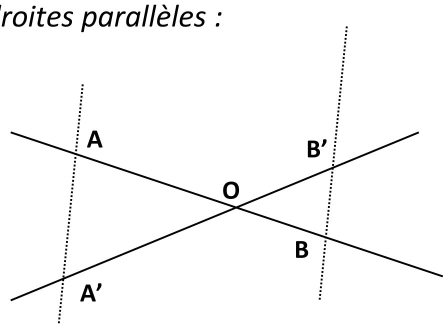


Figure 2

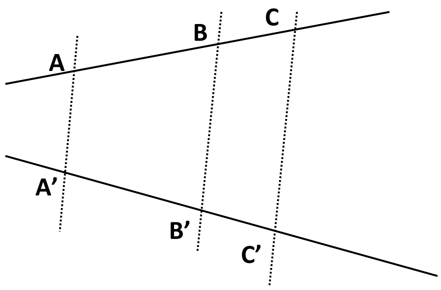


Figure 3

2.2. Enoncé du Théorème de Thalès

Dans chacune des situations représentées ci-dessus, tu peux considérer une des deux sécantes comme un « bâton » et l'autre comme son ombre (les parallèles symbolisant les rayons du soleil). A partir de là, tu peux donc écrire une série de rapports qui sont tous égaux :

$$\frac{\text{Segments de la droite "objet"}}{\text{Segments de la droite "image" (ombre)}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k$$ où ***k*** est différent pour chaque situation

Des parallèles déterminent sur deux droites sécantes des segments homologues de longueurs proportionnelles

Justifications :

Dans chacune des configurations ci-dessus, nous pouvons faire apparaître des triangles semblables (en prolongeant les deux sécantes du 3ème dessin et en appelant « ***O*** » leur point d'intersection) :

- A **Ô est commun** (fig. 1 et 3) ou **AÔB = A'ÔB'** $_1$
- A **OÂA' = OB̂B'** $_2$

$\Rightarrow$ $_3$ ΔOAA' ΔOBB'

$\Downarrow$ $_4$

$$\boxed{\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}}$$

En permutant les moyens du rapport écrit ci-dessus, on obtient :

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OB} \pm \overline{OA}}{\overline{OB'} \pm \overline{OA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \quad _5$$

$_1$: ***Deux angles opposés par le sommet ont la même amplitude.***

$_2$: ***Deux angles correspondants (fig. 1 et 3 - alternes-internes fig. 2) formés par deux droites // et une sécante ont la même amplitude.***

$_3$: ***Si deux triangles ont deux angles homologues de même amplitude, alors ils sont semblables.***

$_4$: ***Les côtés homologues de deux triangles semblables ont des longueurs proportionnelles.***

$_5$: ***Dans toute proportion, si on permute les moyens, on obtient une nouvelle proportion.***
Dans toute proportion, la différence (la somme) des antécédents est à la différence (la somme) des conséquents comme chaque antécédent est à son conséquent.

Par un raisonnement analogue avec les triangles OAA' et OCC', … nous obtenons :

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k$$

2.3. Propriétés des proportions (on suppose tous les dénominateurs différents de zéro)

2.3.1. Règle 1

Dans toute proportion, si on permute les moyens, on obtient une nouvelle proportion.

En L.M. : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

En effet, le produit des moyens et le produit des extrêmes n'ont pas changé d'une proportion à l'autre.

2.3.2. Règle 2

Dans toute proportion, si on permute les extrêmes, on obtient une nouvelle proportion.

En L.M. : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$

En effet, le produit des moyens et le produit des extrêmes n'ont pas changé d'une proportion à l'autre.

2.3.3. Règle 3

Dans toute proportion, si on inverse les fractions, on obtient une nouvelle proportion.

En L.M. : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

En effet, le produit des moyens et le produit des extrêmes ont été permutés d'une proportion à l'autre.

2.3.4. Règle 4

Dans toute proportion, la somme (ou la différence) des antécédents est à la somme (ou la différence) des conséquents comme chaque antécédent est à son conséquent.

En L.M. : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

En effet, on a :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \,.\, d = b \,.\, c \qquad {}_1$$

En ajoutant ***a . b*** aux deux membres de l'égalité, on obtient :

a.d ± a.b = b.c ± a.b   c'est-à-dire   a.(d ± b) = b.(a ± c)

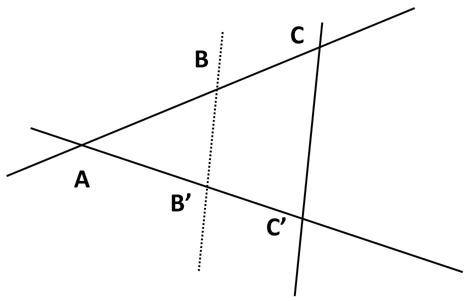
En divisant les deux membres de l'égalité par ***b.(b ± d)***, on arrive à :

$$\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

$_1$: ***Dans une proportion, le produit des moyens est égal au produit des extrêmes.***

2.4. Réciproque du théorème de Thalès

2.4.1. *Formulation dans le cas d'un triangle*

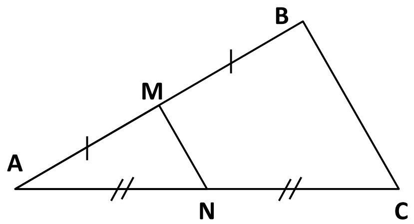


Si dans un triangle, une droite détermine sur deux côtés des segments de longueurs proportionnelles, alors cette droite est parallèle au troisième côté.

Si $\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}}$ **alors** **BB' // CC'**

Rem. : Le raisonnement a été expliqué dans la découverte de la réciproque du théorème de Thalès.

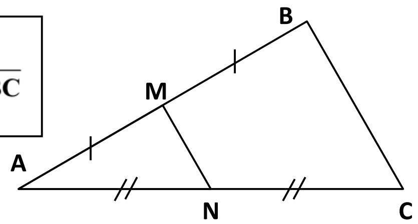
Cas particulier : réciproque du théorème des milieux



$\Rightarrow$

MN // BC

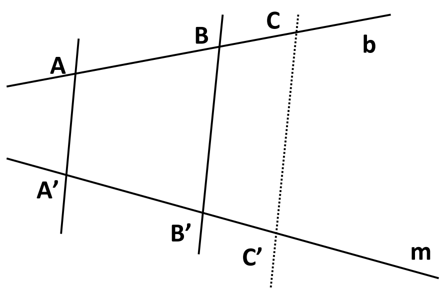
$\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC}$



Si ***M*** est le milieu de [AB] et ***N*** le milieu de [AC], le théorème devient :

Dans un triangle, le segment qui joint le milieu de deux côtés est parallèle au troisième côté (et en vaut la moitié).

2.4.2. *Formulation générale*



Si un point *C* de la droite *b* et un point *C'* de la droite *m* vérifie la condition $\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$ **alors la droite *CC'* est parallèle aux droites AA' et BB'**

3. MILIEU D'UN SEGMENT DANS LE PLAN CARTESIEN

Parmi les nombreuses applications du théorème de Thalès, le calcul du milieu d'un segment du repère cartésien est très intéressant.

Par Thalès, le milieu M du segment [AB] avec les points $A\ (x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_b\ ;\ y_b)$ peut se calculer en appliquant la formule :

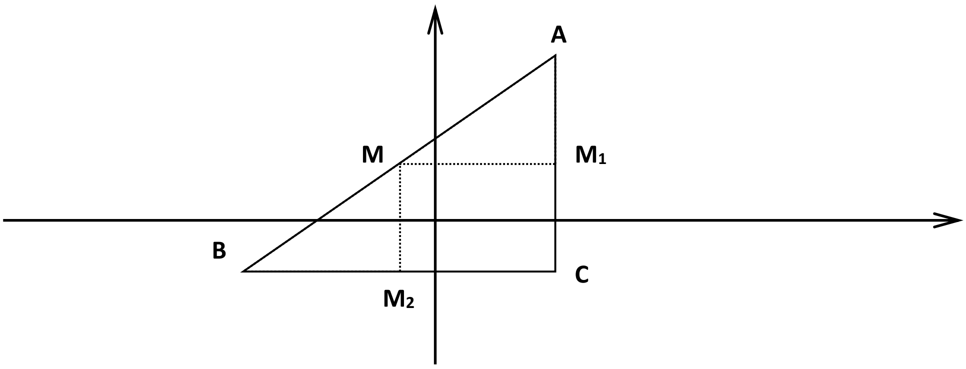
$$\boxed{M = \left(\frac{x_a + x_b}{2}\ ;\ \frac{y_a + y_b}{2}\right)}$$

En effet, dans le triangle rectangle ABC, on a :

$$\overline{AM_1} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}|y_b - y_a| \qquad \text{et} \qquad \overline{M_2C} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2}|x_b - x_a|$$

En appliquant le théorème des milieux, on a :

M_1 milieu de [AC] et M_2 milieu de [BC]



Donc, l'abscisse de M_2 $= \text{abscisse de } C - \overline{M_2C}$

$= x_C - \frac{1}{2}|x_b - x_a|$

$= x_a - \frac{1}{2}(x_a - x_b)$ (dans le cas décrit sur le dessin)

$= \frac{1}{2}x_a + \frac{1}{2}x_b$ = abscisse de M

Donc, l'ordonnée de M_1 $= \text{ordonnée de } A - \overline{AM_1}$

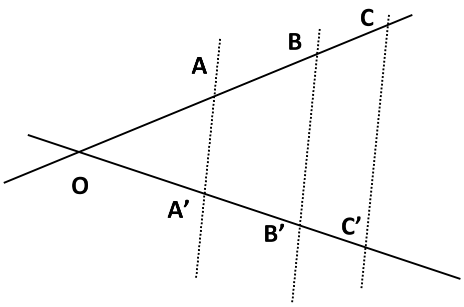
$= y_a - \frac{1}{2}|y_b - y_a|$

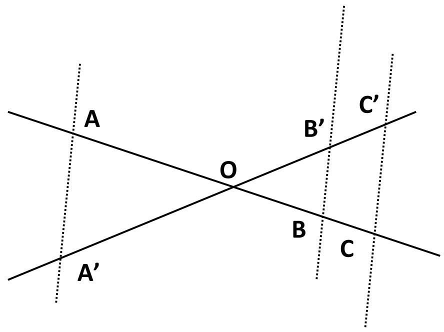
$= y_a - \frac{1}{2}(y_a - y_b)$ (dans le cas décrit sur le dessin)

$= \frac{1}{2}y_a + \frac{1}{2}y_b$ = ordonnée de M

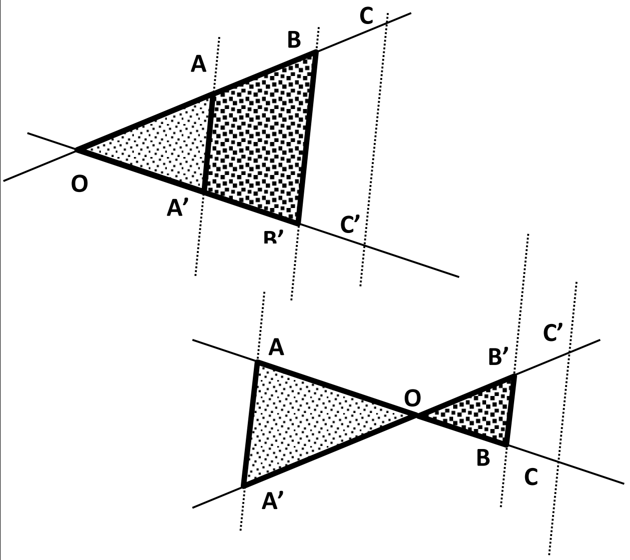
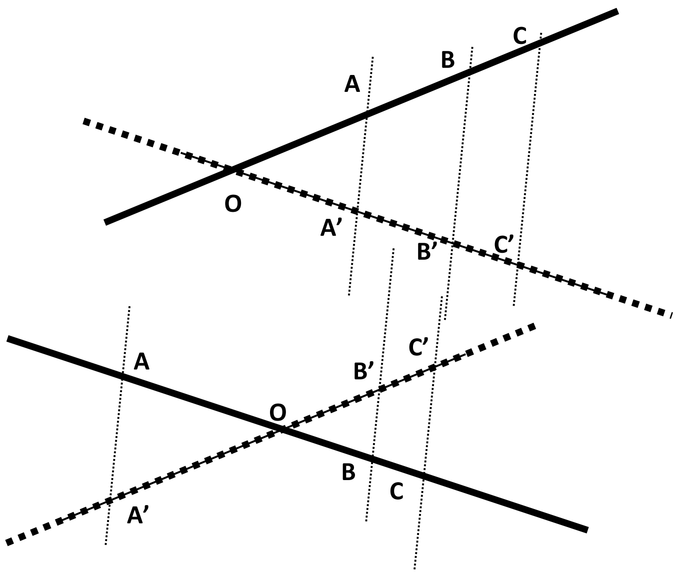
Une justification analogue permet de montrer que cette relation est valable quel que soit le quadrant dans lequel A (ou B) se trouve.

4. SYNTHESE TRIANGLES SEMBLABLES ET THALES



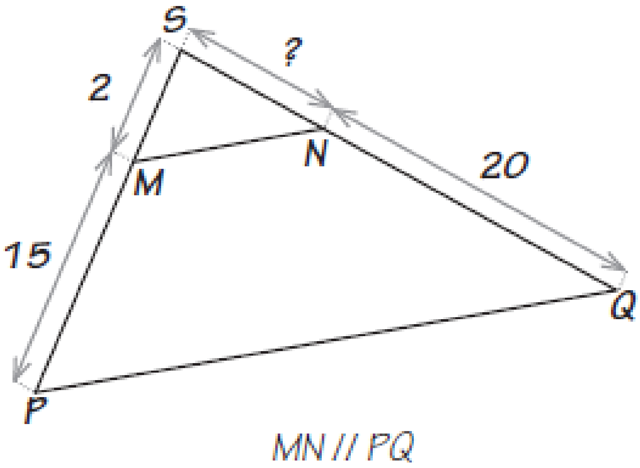


A partir des deux situations suivantes, tu peux écrire différentes proportions déduites soit des triangles semblables, soit du théorème de Thalès :

Triangles semblables	Thalès
	
Tu ne peux pas prendre en compte plus de 2 triangles à la fois.	**Tu peux prendre en compte TOUS les segments délimités par les parallèles sur les deux sécantes.**
$\left\{\begin{array}{l}\Delta OAA' \\ \Delta OBB'\end{array}\right. \Rightarrow \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}} = k$ où **k est le rapport de similitude entre les 2 triangles.**	AA' // BB' // CC' $\Downarrow$ $\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \ldots = k$ où **k est le rapport de projection d'une droite sur l'autre.**
Les segments homologues sont les trois côtés des triangles ; les **numérateurs** des fractions sont les **trois côtés d'un triangle** et les **dénominateurs** les **trois côtés de l'autre triangle** : **Tu peux travailler avec des segments pris sur les parallèles**	Les **segments homologues sont exclusivement** pris sur les **deux sécantes** ; les **numérateurs** des fractions sur **une des sécantes** et les **dénominateurs** sur **l'autre.** **Tu ne peux pas travailler avec des segments pris sur les parallèles mais tu peux utiliser des segments qui ne sont pas des côtés d'un triangle.**

5. APPLICATIONS SIMPLES (THALES)

1] Dans la figure suivante, **calcule** la valeur de l'élément demandé (?)



? = ...

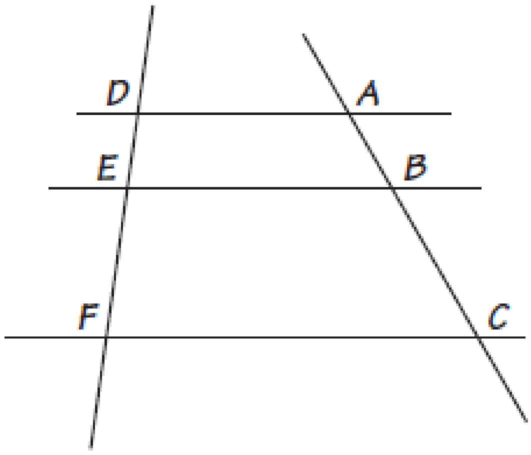
2] Dans la figure ci-contre, AD // EB // FC. **Les égalités suivantes sont-elles vraies ?**

$\frac{|DF|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|BC|}$ OUI - NON

$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|}$ OUI - NON

$\frac{|DE|}{|EF|} = \frac{|BC|}{|AB|}$ OUI - NON

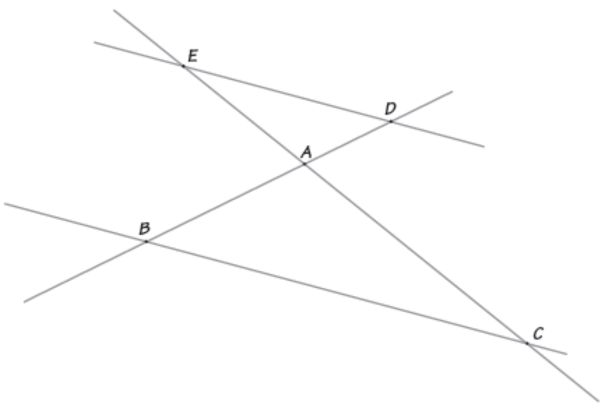
$\frac{|DF|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|AB|}$ OUI - NON



3] Dans le schéma ci-dessous,

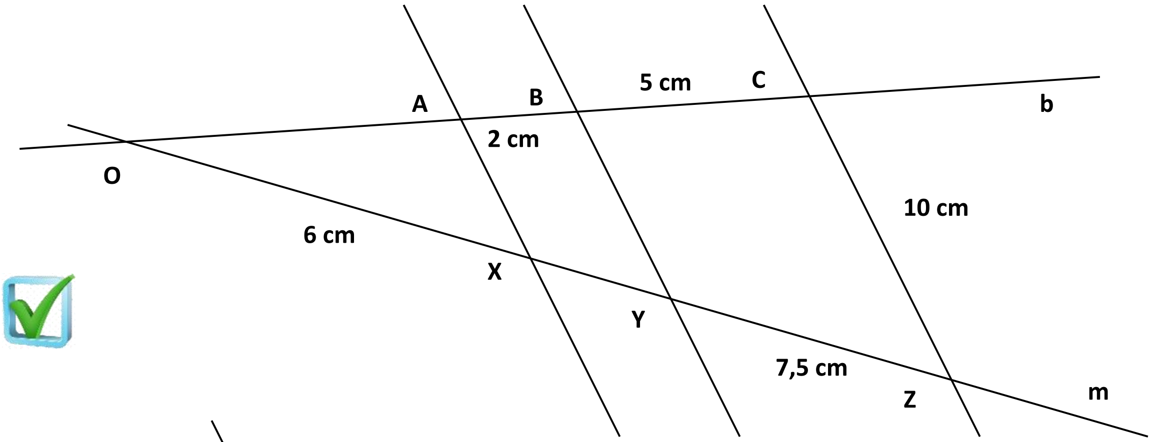
$\overline{AB} = 5$ $\overline{AC} = 12$ $\overline{AD} = 3$

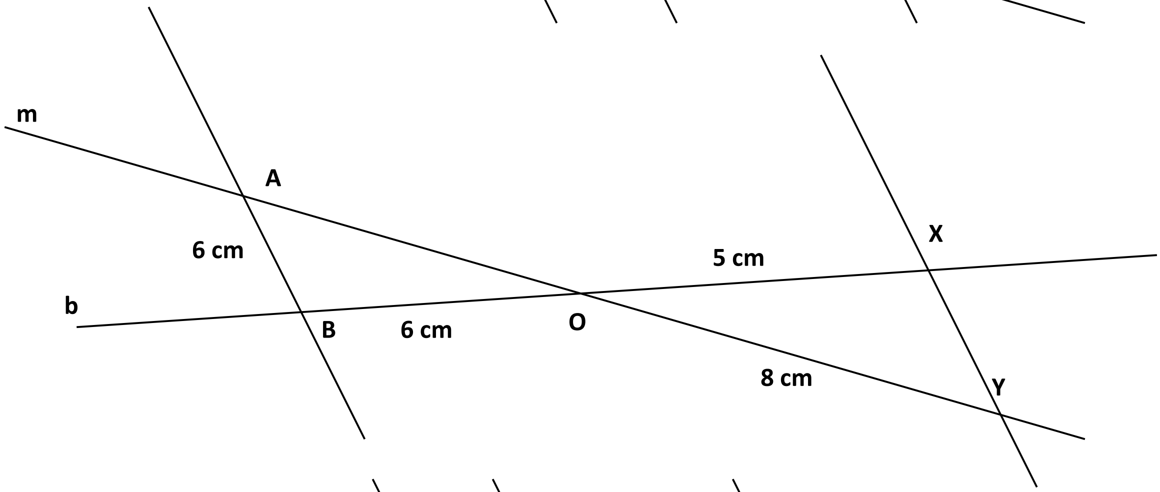
Calcule $\overline{AE}$ sachant que ED est parallèle à BC.

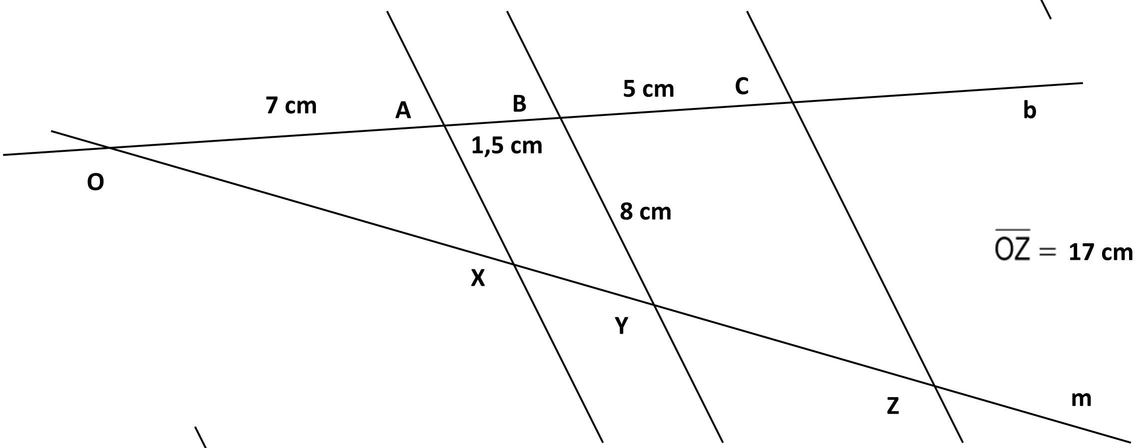


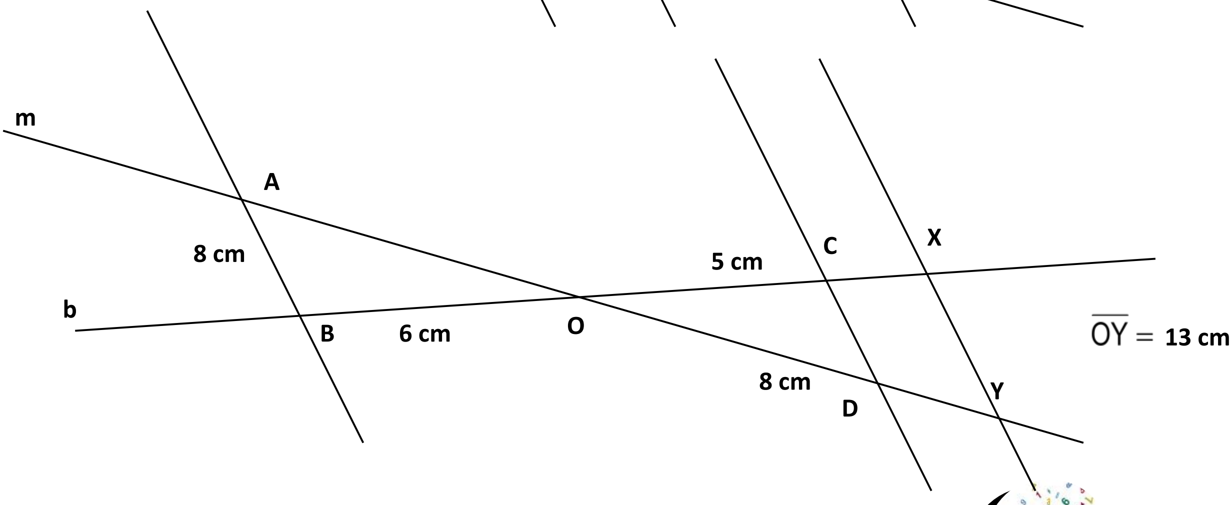
6. APPLICATIONS SIMPLES (THALES ET TRIANGLES SEMBLABLES)

Dans chaque cas, détermine la longueur de tous les segments inconnus dans les réseaux de droites parallèles suivants :

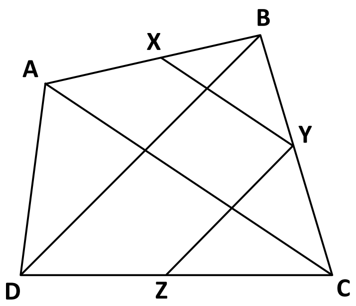








5] Sur la figure ci-contre, XY est parallèle à AC et YZ est parallèle à BD.



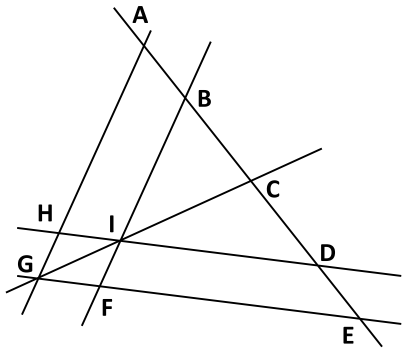
Démontre que : $\dfrac{\overline{AX}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{CZ}}{\overline{CD}}$.

6] Dans le parallélogramme ABCD, trace la diagonale [DB]. Par un point X de [AD], mène la droite parallèle à [DB] qui coupe [AB] en Y ; par le point Y, mène la droite parallèle à [AD] qui coupe [DC] en Z ; et par le point Z, mène la droite parallèle à [DB] qui coupe [BC] en T.

Démontre que : $\dfrac{\overline{AX}}{\overline{DX}} = \dfrac{\overline{BT}}{\overline{CT}}$.

7] Dans la figure ci-contre, tu sais que :

AG // BF et HD // GE.

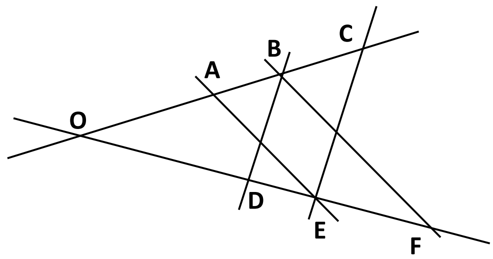


Démontre que : $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{CE}}{\overline{DE}}$.

8] Par un point E du côté [AD] d'un trapèze ABCD (AB // DC), mène la droite parallèles aux bases [AB] et [CD] qui rencontre AC en F et BD en G.

Démontre que : $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{ED}} = \dfrac{\overline{AF}}{\overline{FC}} = \dfrac{\overline{GB}}{\overline{GD}}$.

9] Dans la figure ci-contre, tu sais que AE // BF et BD // EC.
Démontre que les droites AD et CF sont parallèles.



10] Dans un triangles ABC, trace la médiane [AM]. Choisis un point X sur [BC]. Par ce point X, trace la droite ***d*** parallèle à AM. Elle coupe AB en T et AC en Y.

Démontre que : $\dfrac{\overline{AT}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AY}}{\overline{AC}}$.

11] ABCD est un parallélogramme et ABCE est un quadrilatère. Démontre que DE est parallèle à la droite qui comprend les milieux F et G des diagonales du quadrilatère ABCE. Démontre ensuite que $\overline{DE} = 2 \cdot \overline{FG}$

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES
MATH POUR RÉUSSIR : PAGES 131 À 134