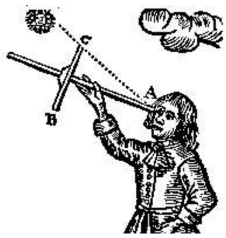
Collège Saint-Barthélemy
Y. Michiels

Mathématique – Troisième année

UAA1 – Figures isométriques et semblables



Triangles semblables

OBJECTIFS – UAA1 : Figures isométriques et figures semblables

Connaitre

- Reconnaître des triangles semblables dans une configuration et justifier à l'aide du cas de similitude adéquat.
- Repérer les côtés et les angles homologues dans des triangles semblables pour justifier la proportionnalité de longueurs de segments ou l'égalité de l'amplitude d'angles.
- Tirer une conclusion sur des figures géométriques à partir d'une égalité de rapports.
- Etablir une propriété métrique dans un triangle rectangle.

Appliquer

- Calculer une longueur d'un segment à partir d'égalités de rapports de triangles semblables ou en utilisant les propriétés métriques du triangle rectangle
- Dégager des égalités de rapports à partir de triangles semblables.
- Partager un segment en parties égales.
- Construire un segment dont la longueur est quatrième proportionnelle à trois autres.

Transférer

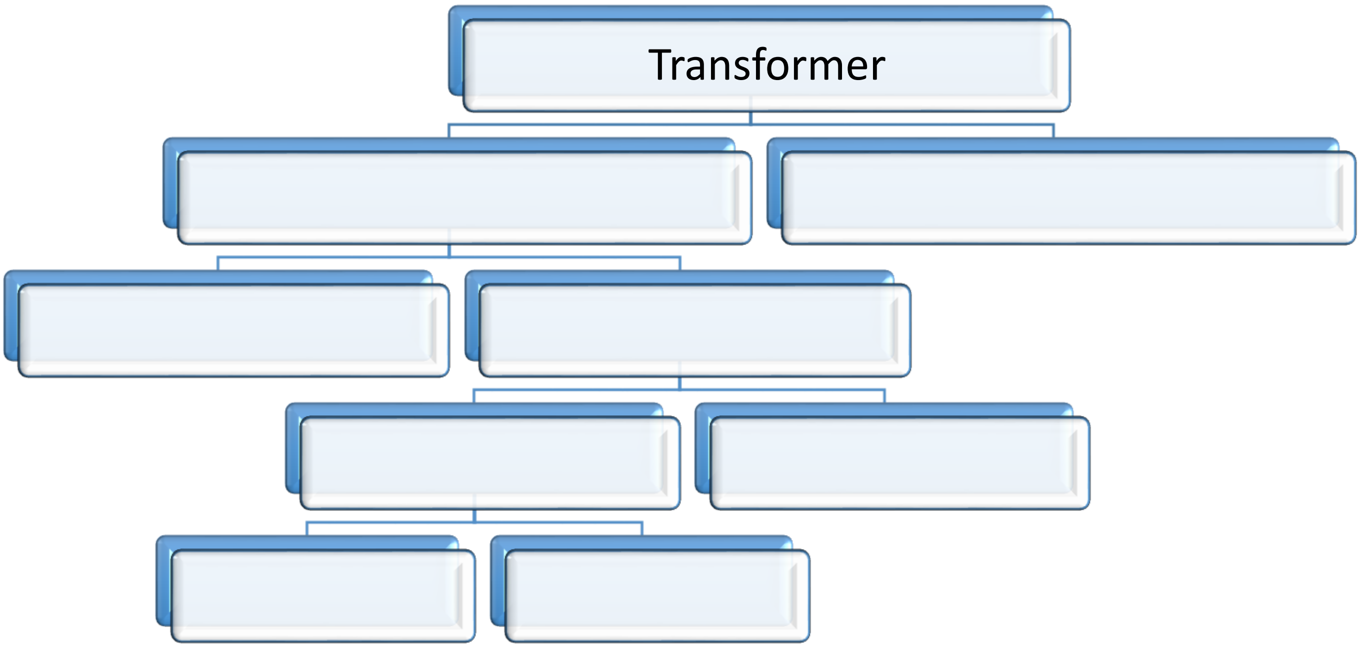
- Démontrer que deux triangles sont semblables pour en dégager une propriété.
- Résoudre un problème faisant appel aux triangles semblables.

EXPLORATION : TRIANGLES ET AGRANDISSEMENTS

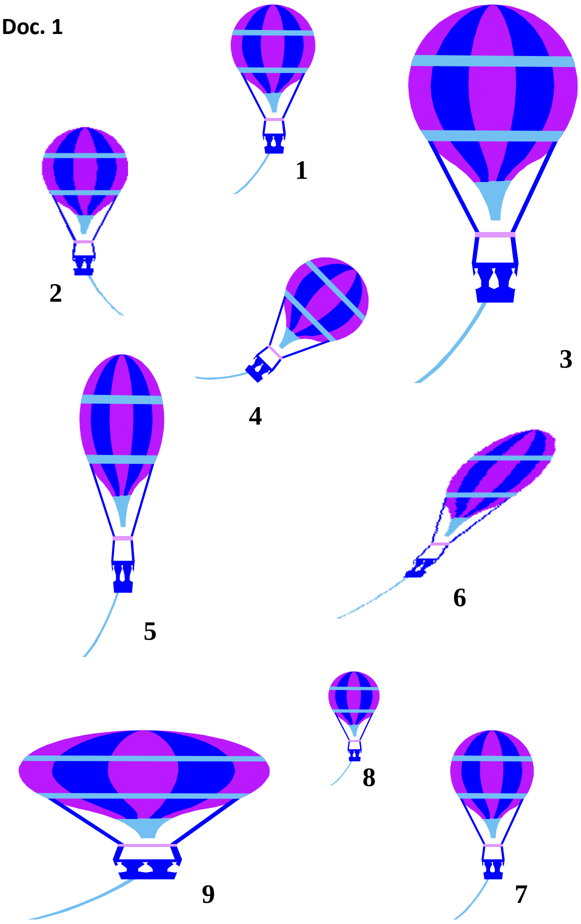
1. En utilisant un programme de traitement d'images sur un ordinateur, on a transformé l'image de la montgolfière 1 de plusieurs façons (***document 1***).
Dans chaque cas, décris en quelques mots la transformation qu'elle a subie et résume-la par le verbe le plus approprié.

	Transformation	Verbe
Montgolfière 1 ⇨ Montgolfière 2		
Montgolfière 1 ⇨ Montgolfière 3		
Montgolfière 1 ⇨ Montgolfière 4		
Montgolfière 1 ⇨ Montgolfière 5		
Montgolfière 1 ⇨ Montgolfière 6		
Montgolfière 1 ⇨ Montgolfière 7		
Montgolfière 1 ⇨ Montgolfière 8		
Montgolfière 1 ⇨ Montgolfière 9		

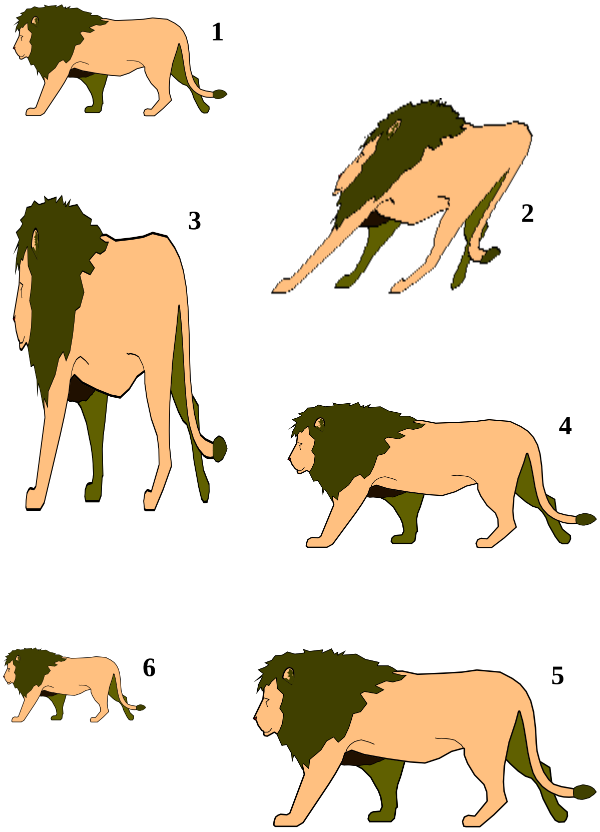
SYNTHESE



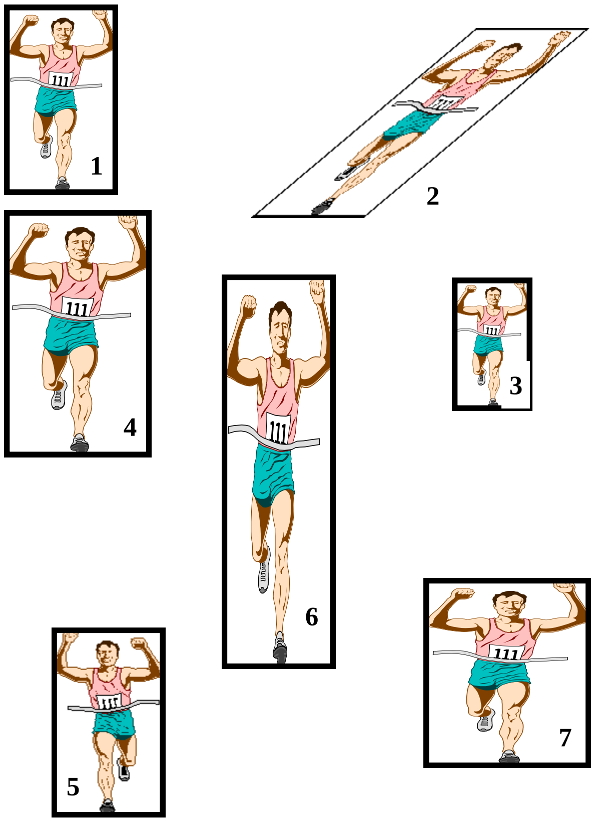
Doc. 1



Doc. 2



Doc. 3



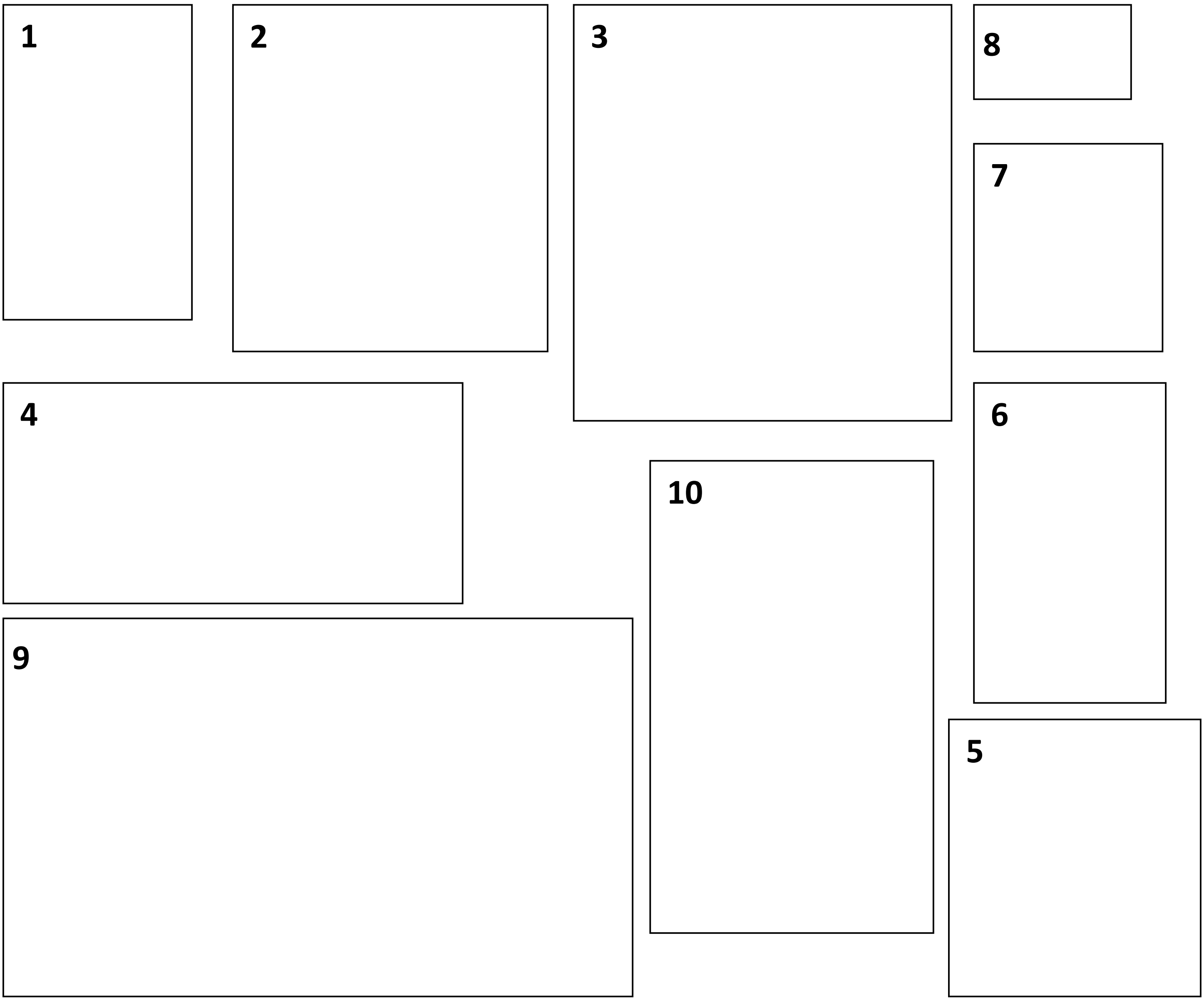
2. Inscris sous chaque lion et sous chaque athlète le verbe qui décrit le mieux la transformation subie par l'originale (numéro 1)

3. Rectangles de même forme

Quels sont les rectangles qui ont la même forme (***document 4***) ? Justifie.

Pour répondre à cette question, vous pouvez mesurer, découper, calculer, … ***MAIS*** *il est indispensable que vous « construisiez » un raisonnement, un outil mathématique qui vous permettra de défendre votre solution face à celle des autres groupes (et du professeur).*
Pour ce faire, chaque groupe devra rédiger (sur un transparent) un texte qui répond aux 2 questions suivantes :

1) Comment *vérifier* ***numériquement*** *(avec des calculs) si deux rectangles sont de même forme ? (+ dessin et exemple).*
2) Comment *vérifier* ***géométriquement*** *(avec des dessins) si des rectangles ont la même forme ? (+ dessin et exemple).*

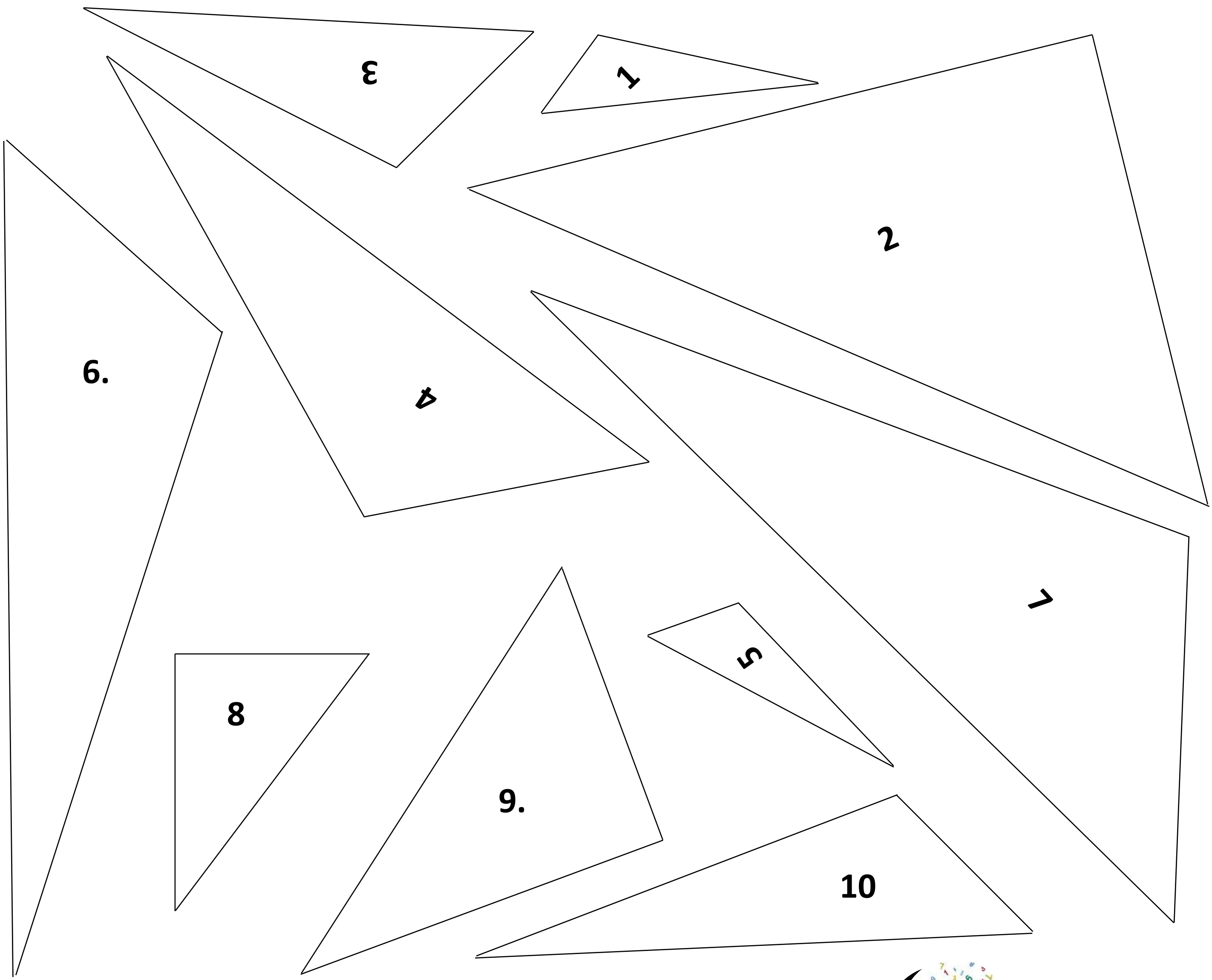


4. Avec des triangles

Tu as vu que pour agrandir ou rétrécir des rectangles (pour détecter des rectangles semblables), différentes solutions s'offraient à toi. Et pour les triangles ?

1) Groupe les triangles (repris ci-dessous) qui te paraissent semblables et justifie pourquoi, selon toi, ils le sont (géométriquement et/ou numériquement).
2) A quel groupe de triangles semblables appartient ***avec certitude*** un triangle dont :
   a) un angle mesure 47° ?
   b) deux de ces angles mesurent respectivement 47° et 115°
   c) un côté mesure 9 cm ?
   d) deux de ces côtés mesurent respectivement 9 et 21 cm ?
   e) ces trois côtés mesurent respectivement 9 cm, 21 cm et 26,1 cm
   f) un côté mesure 9 cm et un angle mesure 47° ?
   g) deux de ces côtés mesurent respectivement 9 et 21 cm et un angle mesure 47° ?
   h) un angle mesure 47° et les deux côtés adjacents à cet angle mesurent respectivement 9 et 21 cm ?

   Si tu ne peux répondre avec certitude, indique « pas assez d'infos » à côté de l'item.



5. Quelles conditions minimales faudrait-il prendre en compte pour être sûr qu'ils soient semblables ? Déduis-en les critères de similitudes de deux triangles.

6. **Calculs de distances inaccessibles**

Tu te demandes sûrement à quoi servent les triangles semblables dans la vie de tous les jours. Tu vas pouvoir découvrir une de leurs utilités dans le défi qui t'est proposé ci-dessous.

Consigne :

Par groupes, vous allez calculer la hauteur du bâtiment de l'école (du sol jusqu'au point le plus haut). Pour ce faire, vous utiliserez différents outils (voir fiches ci-dessous).

1. Avant de vous y rendre, vous allez réfléchir (en classe) à la procédure du calcul de cette distance (quelles mesures dois-je prendre ? Comment placer mon matériel, comment me placer ?). Je vous conseille vivement de réaliser un croquis pour chaque situation.
2. Une fois que vous avez trouvé comment procéder (pour chacune des fiches), nous nous rendrons dans la cours de l'école. Sur place, prenez les mesures utiles à la recherche de cette hauteur.
3. Chaque groupe sera placé à l'endroit convenu par le professeur. Dès qu'un groupe a fini avec un outil, il demande au professeur vers quel autre « atelier » se déplacer en fonction de la disponibilité du matériel ainsi que de l'endroit prévu.
4. Retour en classe : Par groupes et pour chacun des outils utilisés, **calculez**, à partir de vos mesures, la hauteur du bâtiment.

C'est à vous de jouer !

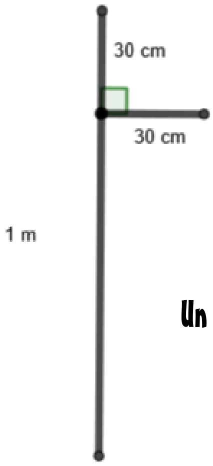
1


Un bâton et un décamètre

2

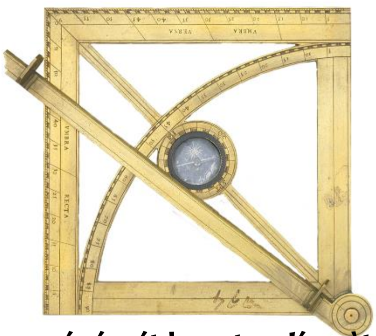
Un miroir et un décamètre

3



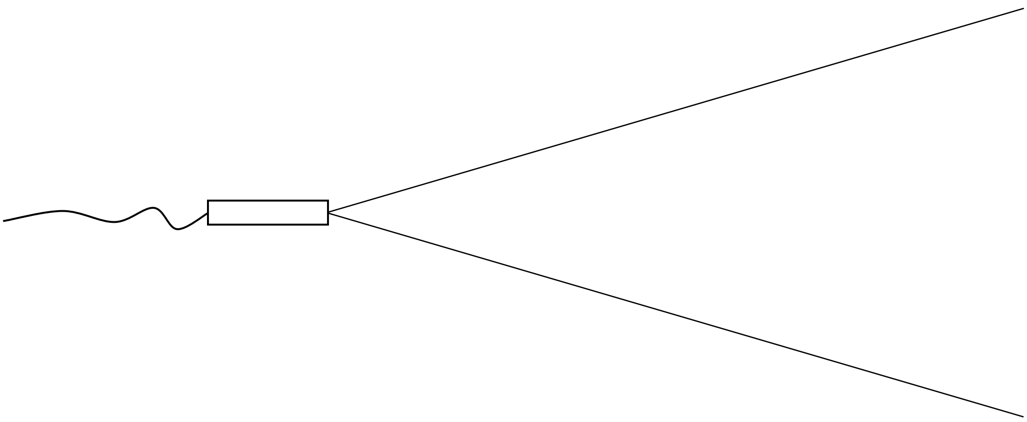
Un bâton de Gerbert et un décamètre

4

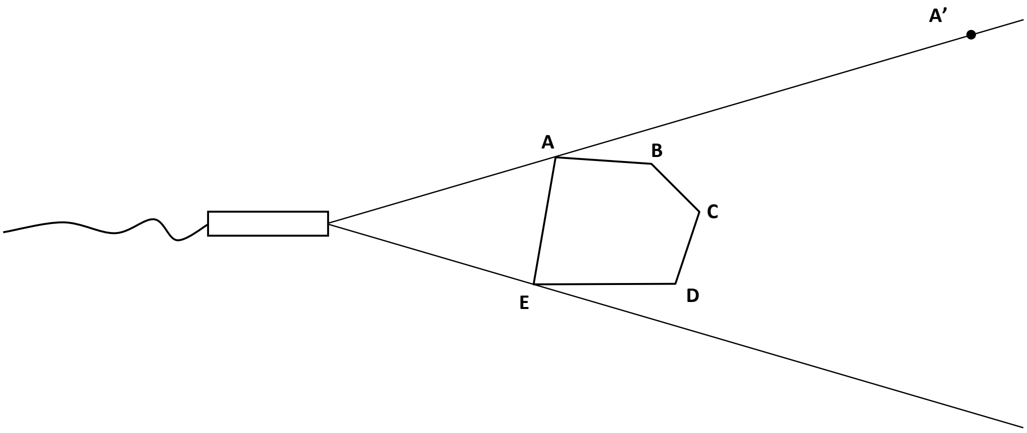

Un carré géométrique et un décamètre

7. Ombre à la lumière d'une lampe

Tu éclaires un triangle quelconque ABC au moyen d'une lampe (exemple : rétroprojecteur). Comment tenir le triangle et la lampe pour que son ombre soit un agrandissement de ABC dont les côtés sont trois fois plus longs ? Dessine la situation en deux dimensions à partir du schéma ci-dessous.



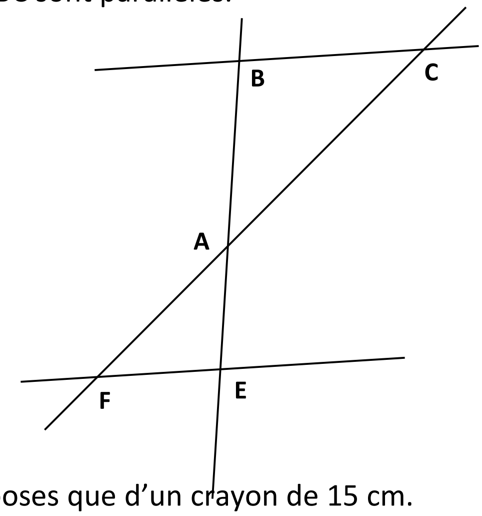
8. Construis l'image A'B'C'D'E' agrandissement du pentagone ABCDE sous l'effet d'une lampe.



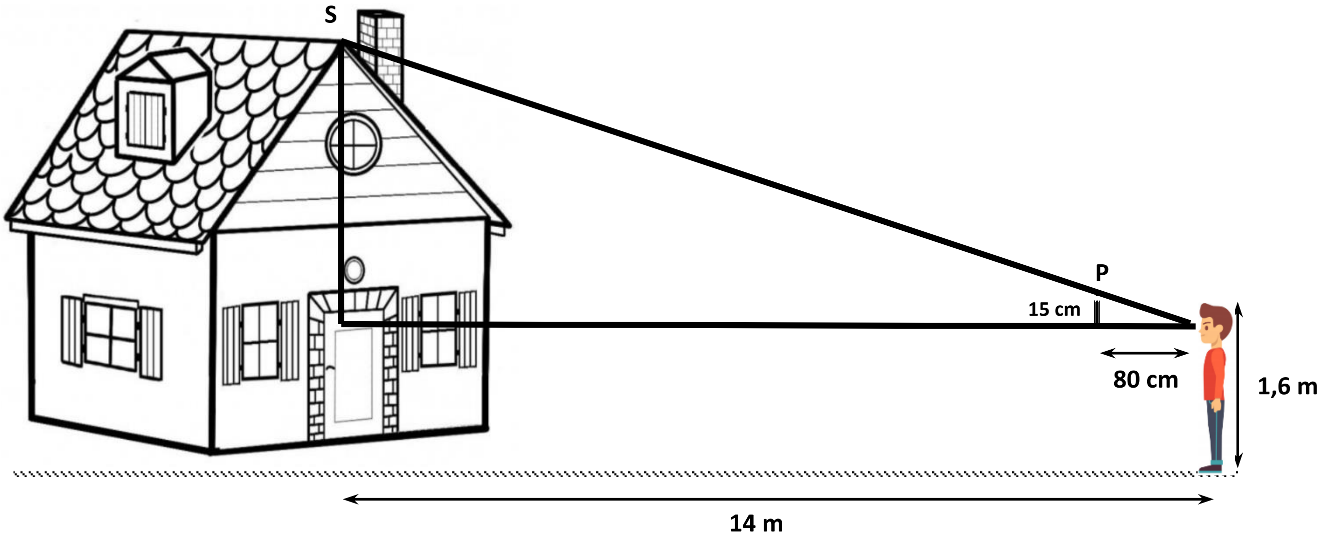
Synthèse sur figures semblables et triangles semblables + 3 cas

9. Complète le tableau ci-dessous sachant que les droites EF et BC sont parallèles.

	$\overline{AB}$	$\overline{AC}$	$\overline{BC}$	$\overline{AE}$	$\overline{AF}$	$\overline{EF}$
I	9	10	15	3		
II	15	25	18		20	
III	12	21			9	7
IV		$\sqrt{6}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	
V		5		$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{9}$



10. A Lille, tu dois mesurer la hauteur d'un bâtiment et tu ne disposes que d'un crayon de 15 cm. Tu le tiens verticalement à hauteur de ton œil (situé à 1,6 m du sol) pour voir en alignement le sommet S du bâtiment et la pointe P du crayon. Tu mesures alors la distance de ton œil au crayon qui vaut 80 cm ainsi que la distance qui te sépare du bâtiment : 9m. Quelle est la hauteur du bâtiment (voir représentation « schématique » ci-dessous) ?



11. **Les pyramides de Khéops et du Louvre**

Pyramide de Khéops

La Pyramide de Khéops en Égypte est une pyramide régulière dont la base est un carré de 231 m de côté et dont la hauteur fait 147 m.

Pyramide du Louvre

Au Louvre, en France, il y a une grande pyramide régulière de base carrée de 33 mètres de côtés et de 21 mètres de hauteur. Son concepteur Ieoh Ming Pei l'a voulue en verre.

Activité

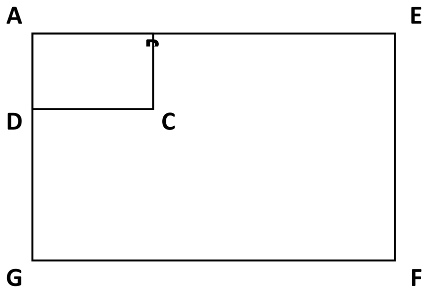
Comparons les pyramides de Khéops et du Louvre :

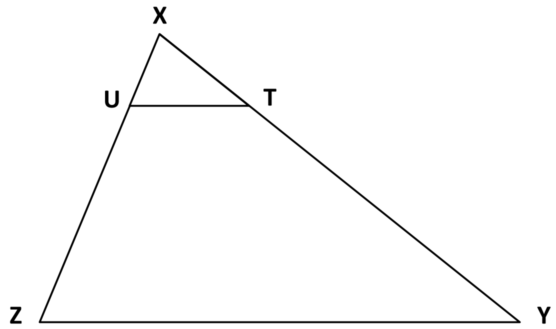
- **a)** Que peux-tu dire à propos des dimensions de ces deux pyramides ?
- **b)** Calcule les aires des bases et compare-les.
- **c)** Calcule les volumes des deux pyramides et compare-les.

d) Que peux-tu en déduire ?

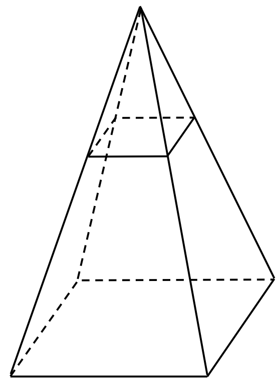
12. Périmètres et aires de figures semblables

1) Compare les périmètres et les aires respectives des rectangles ABCD et AEFG sachant que $\overline{AE} = 3.\overline{AB}$ et $\overline{AD} = 3.\overline{AG}$. Fais de même avec les triangles XYZ et XTU sachant que $\overline{XY} = 4.\overline{XT}$ et $\overline{XZ} = 4.\overline{XU}$. Que peux-tu en déduire ?





2) Voici une pyramide à base carrée coupée par un plan parallèle à la base, aux 2/5ème de sa hauteur à partir du sommet. La section obtenue est un carrée. Si le côté de la base mesure 100 m, calcule le périmètre et l'aire de la section. Quel est le rapport entre les deux volumes des pyramides ?



13. Relations métriques et angles à côtés ⊥

Dans le triangle rectangle ABC rectangle en A, on trace la hauteur AH relative à l'hypoténuse. Trouve des paires de triangles semblables, prouve qu'ils le sont.

Synthèse sur Relations métriques dans un triangle rectangle

SYNTHESE : FIGURES SEMBLABLES ET PROPORTIONS

1. RAPPELS : RECTANGLES SEMBLABLES ET PROPORTIONS

En deuxième, tu as découvert que des ***figures semblables*** sont des figures obtenues par agrandissement ou réduction (comme une photocopieuse) d'une figure de départ (montgolfière, lion,…).

Pour des « dessins », tu peux déterminer assez facilement si ce dessin a été « étiré » horizontalement, verticalement (**déformé**) ou si il a été agrandi ou rétréci (même **forme**). Par contre, pour des rectangles, certains pourraient croire qu'ils sont tous de même forme, tous semblables.

Pour prouver que des rectangles sont semblables, deux pistes sont possibles : l'une est numérique et l'autre géométrique.

1.1. Relation numérique : rapports et proportions

Pour vérifier numériquement que des rectangles (de dimensions $L_n \cdot l_n$) sont semblables, deux procédés sont envisageables :

- Soit, on les prend deux par deux et on essaie de calculer la valeur du **coefficient d'agrandissement ou de réduction** :

	Longueur (L)	Largeur (l)	Rapport
Rectangle n° …			=
Rectangle n° …			

$$\frac{L_{...}}{L_{...}} = \frac{l_{...}}{l_{...}} = ... = k = \text{coefficient de proportionnalité } (\text{d'agrandissement ou de réduction dans ce cas})$$

  Si les deux longueurs sont **dans le même rapport** que les deux largeurs, les deux rectangles sont **semblables.**

- Soit, on calcule les rapports entre longueurs et largeurs de tous les rectangles ; ce rapport (valable pour tous les rectangles semblables) est appelé **coefficient de forme** :

	Rectangle n°…	Rectangle n°…	Rectangle n°…	Rectangle n°…	Rapport
Longueur					=
Largeur					

$$\frac{L_{...}}{l_{...}} = \frac{L_{...}}{l_{...}} = \frac{L_{...}}{l_{...}} = \frac{L_{...}}{l_{...}} = ... = k = \text{coefficient de proportionnalité } (\text{de forme - un seul pour tous les rectangles semblables})$$

  Si tous **les rapports** entre les longueurs et largeurs sont égaux, les rectangles sont **semblables.**

Remarque : Dans chaque cas, un autre rapport pouvait être calculé en inversant numérateur et dénominateur de chaque fraction. Ces deux rapports sont donc ………………. l'un de l'autre.

1.2. Vocabulaire et propriété

1.2.1. Rôles d'une fraction

1. Une fraction exprime un quotient. Elle est souvent utilisée car l'écriture décimale du quotient s'avère parfois incomplète (décimaux périodiques illimités).

Le **premier rôle de la fraction** est d'exprimer **un partage**.

Exemple : Partager 1 gâteau en 6 personnes.

La part de chacune s'exprime par $\frac{\mathbf{1}\ \text{gâteau}}{\mathbf{6}\ \text{personne}}$. Nous remarquons qu'une unité (pas toujours exprimée) accompagne le résultat du partage. Dans ce cas-ci, c'est le « gâteau **par** personne ».

2. Le problème ci-dessus nous a fait découvrir un **deuxième rôle de la fraction**.

   La fraction $\frac{5}{3}$ n'exprime plus un partage. Il ne s'agit pas de partager 5 cm en 3 cm, cela n'a pas de sens. Il s'agit plutôt d'exprimer une comparaison : le **rapport** entre la longueur et la largeur du rectangle.

Nous retiendrons que cette fraction exprime **un rapport**.

Remarque :

Quand les grandeurs comparées sont de même nature (ici deux longueurs exprimées en mm), ce rapport n'a pas d'unité ; c'est un nombre abstrait.

1.2.2. Proportions

1. Le **rapport** entre deux nombres ***a*** et ***b*** s'écrit sous la forme $\frac{a}{b}$ (voir ci-dessus).

2. **L'égalité entre deux rapports** s'appelle une **proportion**

   Soit la proportion $\frac{^{\text{extreme}}a}{_{\text{moyen}}b} = \frac{c^{\text{moyen}}}{d_{\text{extreme}}}$, les termes ***a*** et ***d*** s'appellent les termes **extrêmes**.

   les termes ***b*** et ***c*** s'appellent les termes **moyens**.

   On dira que : ***a*** est à ***b*** comme *c* est à *d* (b et d ne peuvent être nuls) ; ***a*** et ***c*** sont les antécédents et ***b*** et ***d*** sont les conséquents

Une propriété très importante (nous en verrons d'autres plus tard dans le cours) nous permettra de résoudre certaine équation ou de calculer le terme inconnu d'une proportion :

Nous retiendrons que :

Dans toute proportion, le produit des moyens est égal au produit des extrêmes.

$$\forall a,c \in R, \forall b,d \in R_0 : \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a.d = b.c$$

Preuve :

Exemple d'utilisation :

Les dimensions d'un rectangle sont : 13 cm sur 18 cm. Que mesure la largeur d'un rectangle semblable au premier si sa longueur mesure 19 cm ?

En utilisant le coefficient de forme, on a :

$$\frac{18}{13} = \frac{19}{x}$$
$$\Rightarrow 18.x = 13.19$$
$$\Rightarrow x = \frac{247}{18}$$

Sa largeur mesure donc : $\frac{247}{18}$ cm.

1.3. Tableau de proportionnalité – Proportionnalité dans un tableau

Dans un tableau, si on place toutes les valeurs qui se rapportent à une grandeur sur une même ligne et les valeurs correspondantes d'une autre grandeur sur une autre ligne et si tous les rapports obtenus sont égaux, alors ce tableau est un tableau de proportionnalité.

Dans un tableau de proportionnalité, les valeurs correspondantes des deux grandeurs, forment une ou plusieurs proportion(s).

Deux grandeurs sont directement proportionnelles
ssi
il existe entre elles deux coefficients de proportionnalité (l'un étant l'inverse de l'autre).

Dans un tableau de proportionnalité :

- on passe de la 1ère à la 2ème ligne en multipliant ou divisant par un même nombre appelé **coefficient de proportionnalité** et de la 2ème à la 1ère en multipliant ou divisant par le coefficient inverse → **rapports externes**
- On passe d'une colonne à l'autre en multipliant ou divisant les 2 grandeurs par un même nombre → **rapports internes**
- A la somme de deux valeurs d'une ligne correspond la somme des valeurs correspondantes de l'autre ligne.

x 3   : 2

N^{bres} de litres de diesel	**6**	**18**	**9**	**6 + 9 = 15**
N^{bres} de Km parcouru	**100**	**300**	**150**	**100 + 150 = 250**

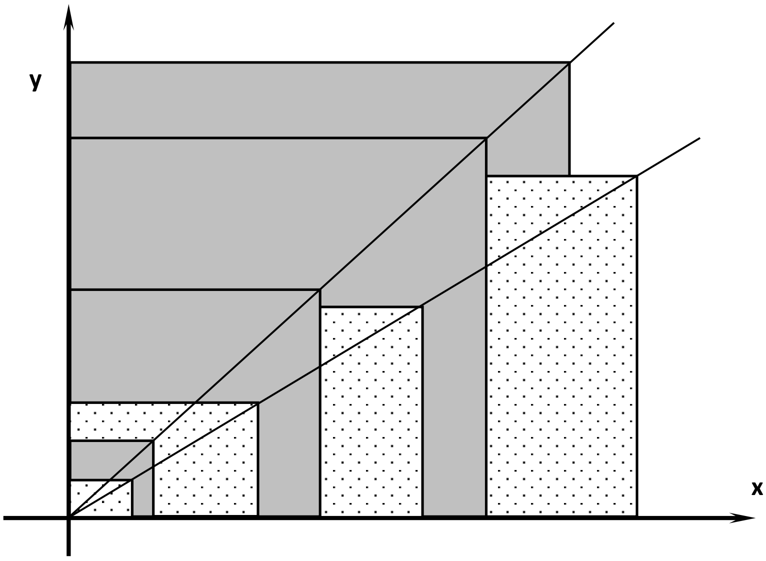
x 3   : 2

: 16,66…   x 16,66…

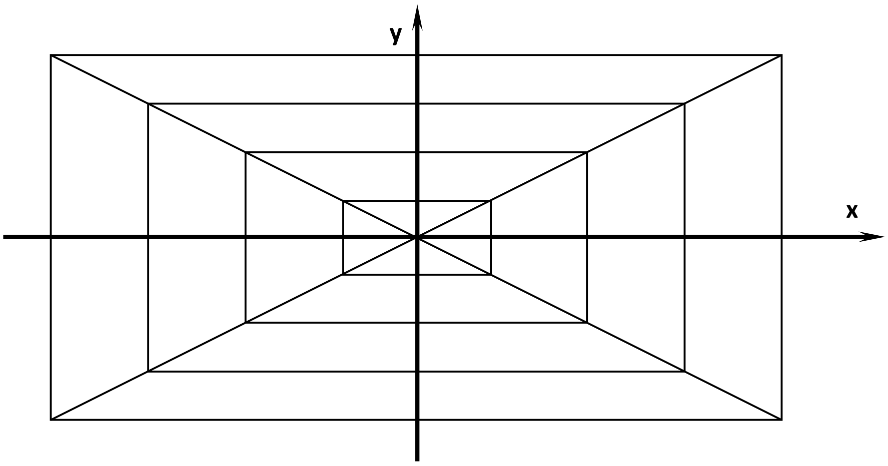
1.4. Relation géométrique : proportionnalité sur un graphique

Pour vérifier géométriquement que des rectangles (de dimensions L_n . l_n) sont semblables, plusieurs procédés sont envisageables. Voici les deux plus « simples » :

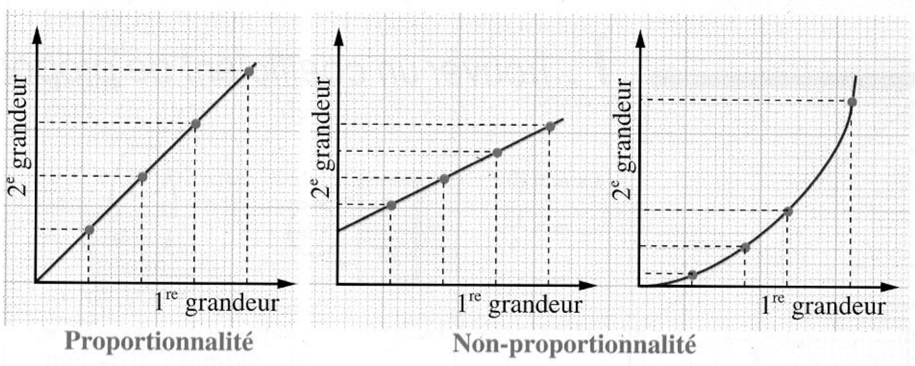
- Soit, on les superpose en faisant coïncider un sommet et les deux côtés issus de ce sommet puis on vérifie que les quatrièmes sommets sont tous alignés avec le sommet commun.



- Soit on superpose tous les centres des rectangles en veillant à ce que les longueurs soient parallèles entre-elles (les largeurs le sont aussi, évidemment) ; si les diagonales sont dans le prolongement les unes des autres, les rectangles sont semblables.



- En « plaçant » un repère sur ces dessins (voir ci-dessus), on constate **qu'il y a proportionnalité entre deux grandeurs lorsque tous les points du graphique sont alignés avec l'origine du repère** (nous y reviendrons dans un autre chapitre).



2. NOMBRES D’OR – RECTANGLES D’OR

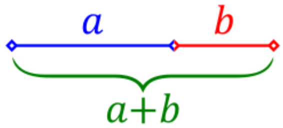
2.1. Le nombre d’or

Depuis la plus haute antiquité, un nombre étonnant, mystérieux et magique apparait dans de nombreux domaines tels que la géométrie, l’architecture, la peinture, la nature,…

Ce fameux ***nombre d’or*** serait une expression d’harmonie et d’esthétique dans les arts, dans la nature, même si certains lui reproche son caractère ésotérique qui cherche absolument à lui trouver une obscure beauté et qui semble y parvenir !

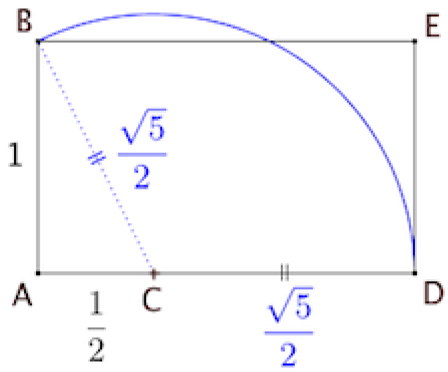
On le note ϕ (phi) en hommage au sculpteur grec *Phidias* (V$^{\text{ème}}$ siècle avant J.C.) qui participa à la décoration du Parthénon sur l’Acropole à Athènes.

Sa valeur exacte est de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Il s’agit donc d’une nombre irrationnel dont une valeur approchée est : 1,618 033 988 749 894 848 204 586 834 365 638 117 720 309 179 805 762 862 135 448 622 705 260 462 189



$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} \approx \mathbf{1{,}618}$$

Le nombre d'or correspond à un rapport de longueurs. Pour l’obtenir, il faut partager un segment de façon que le rapport de la grande partie (« a ») sur la petite partie (« b ») soit égal à celui du tout (« a + b ») sur la grande part (« a »).



Ce rapport est le nombre d'or que l'on retrouve dans les côtés du rectangle d'or.

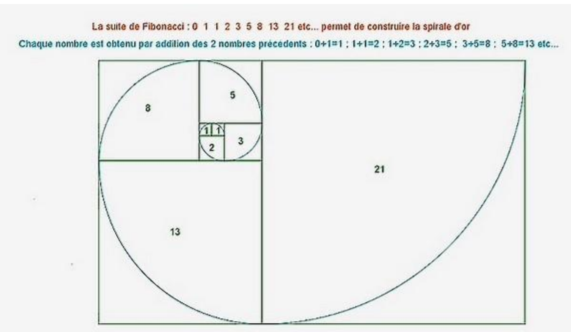
Ainsi, pour construire un segment de longueur égale au nombre d'or, il faut d’abord tracer un triangle ABC rectangle en A dont les côtés de l'angle droit mesurent 1 et 1/2. Puis on reporte la longueur de l'hypoténuse sur la demi-droite [AC (voir figure ci-dessous). A l'aide du théorème de Pythagore, tu peux montrer facilement que l'hypoténuse BC mesure √5/2 et donc la longueur AD du rectangle ABED est égale au nombre d'or. Ce rectangle est un rectangle d'or.

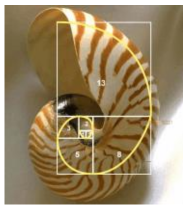
2.2. Le rectangle d'or

Un rectangle d’or est un rectangle dont le coefficient de forme (ou format - exemple : le format d'une feuille de papier classique A3, A4 ou A5 est $\sqrt{2}$) est égal au nombre d’or.
On retrouve plusieurs rectangles d’or sur la façade du Parthénon à Athènes.

2.3. La spirale d'or

Pour construire une spirale d’or, il faut construire un rectangle d’or dans lequel on dessine un carré de côté la largeur du rectangle. On réitère l’opération dans le rectangle restant qui est un rectangle d’or … et ainsi de suite, … Puis, on construit des quarts de cercle dans les carrés. La spirale obtenue se rencontre souvent dans la nature : tournesols, pommes de pins, coquillages, disposition des feuilles ou des pétales sur certaines plantes.



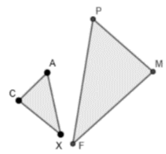


3. FIGURES SEMBLABLES : VOCABULAIRE

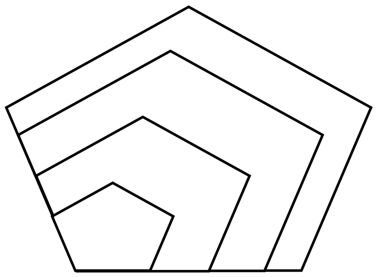
Tout comme pour les rectangles, on dit que deux polygones sont ***semblables*** s'ils ont même forme, sans avoir nécessairement les mêmes mesures : l'un peut être un agrandissement de l'autre, avec ou sans retournement. On dit aussi qu'ils sont image l'un de l'autre par une ***similitude***.

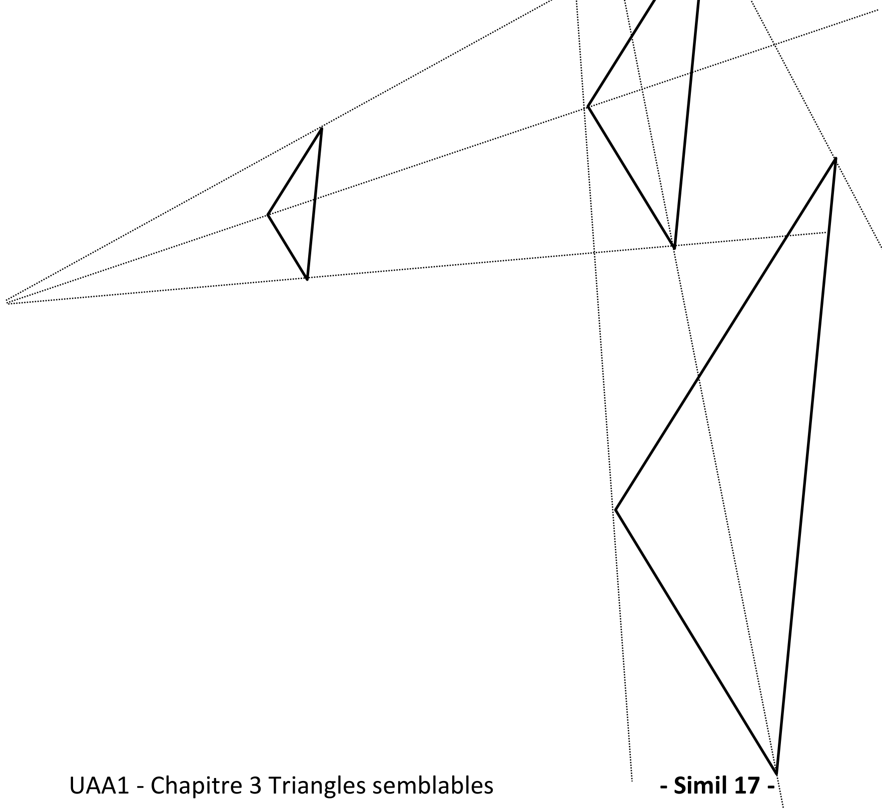
Lorsque deux figures sont semblables, on appelle :

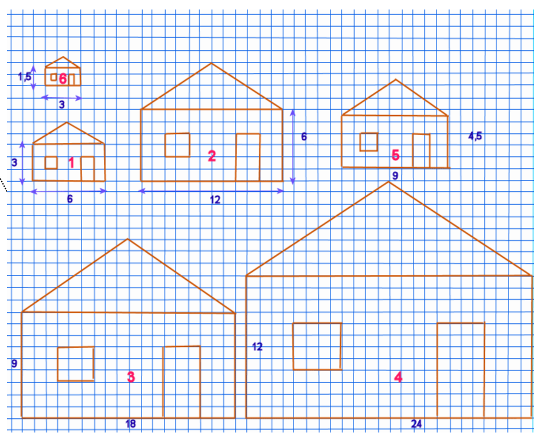
- côtés ***homologues***, les côtés qui se correspondent ;
- angles ***homologues***, les angles qui se correspondent ;
- sommets ***homologues***, les sommets qui se correspondent.

Deux polygones sont **SEMBLABLES** si et seulement si : • leurs angles homologues (deux à deux) ont la **<u>même amplitude</u>** **ET** • leurs côtés sont deux à deux dans un même rapport (les côtés homologues ont des longueurs proportionnelles). Ce rapport est le ***rapport de similitude***.	$\Delta\, PMF$ $\Delta\, ACX$ $\Updownarrow$  • $\hat{P}° = \hat{A}°,\ \hat{M}° = \hat{C}°$et $\hat{F}° = \hat{X}°$ **ET** • $\frac{\overline{PM}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{MF}}{\overline{CX}} = \frac{\overline{PF}}{\overline{AX}} = r$

Si en plus, les figures semblables ont leurs côtés homologues parallèles, on dit qu'elles sont ***homothétiques*** ; image l'une de l'autre par une ***homothétie***.



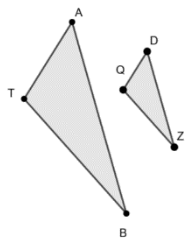
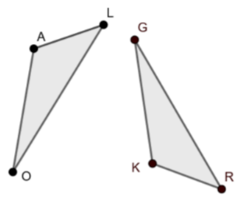
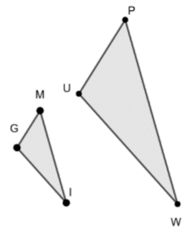




Collège Saint-Barthélemy
Y. Michiels
Mathématique – Troisième année

4. RAPPORT DE SIMILTUDE

Un **rapport de similitude** de deux figures semblables est un réel positif non nul « r » exprimant le rapport des longueurs des côtés homologues.

Similitudes		
Réductions	**Isométries**	**Agrandissements**
Si $0 < r < 1$ Exemple : Les triangles ATB et DQZ sont **semblables.** $\frac{\overline{DQ}}{\overline{AT}} = \frac{\overline{DZ}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{QZ}}{\overline{TB}} = r$ avec $r = \frac{1}{2}$ par exemple. 	**Si $r = 1$** Exemple : Les triangles ALO et KRG sont **semblables.** $\frac{\overline{KR}}{\overline{AL}} = \frac{\overline{RG}}{\overline{LO}} = \frac{\overline{KG}}{\overline{AO}} = r$ avec $r = 1$ 	**Si r> 1** Exemple : Les triangles MIG et PWU sont **semblables.** $\frac{\overline{PW}}{\overline{MI}} = \frac{\overline{PU}}{\overline{MG}} = \frac{\overline{WU}}{\overline{IG}} = r$ avec $r = 2$ par exemple. 

5. PERIMETRES, AIRES ET VOLUMES DES FIGURES SEMBLABLES

Le **rapport des périmètres** de deux figures semblables est égal **au rapport de similitude**.

$$\frac{Périmètre_{image}}{Périmètre_{initial}} = r$$

Le **rapport des aires** de deux figures semblables est égal **au CARRÉ du rapport de similitude.**

$$\frac{Aire_{image}}{Aire_{initial}} = r^2$$

Le **rapport des volumes** de deux figures semblables est égal **au CUBE du rapport de similitude.**

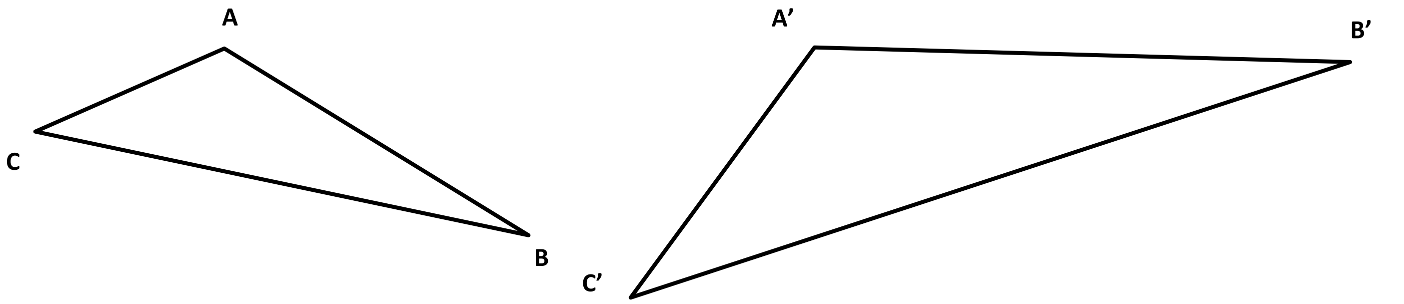
$$\frac{Volume_{image}}{Volume_{initial}} = r^3$$

6. TRIANGLES SEMBLABLES

6.1. Cas de similitude des triangles

6.1.1. *Critère CCC (côté – côté – côté)*

Si deux triangles ont leurs côtés homologues de longueurs proportionnelles (dans un même rapport), alors ils sont semblables.



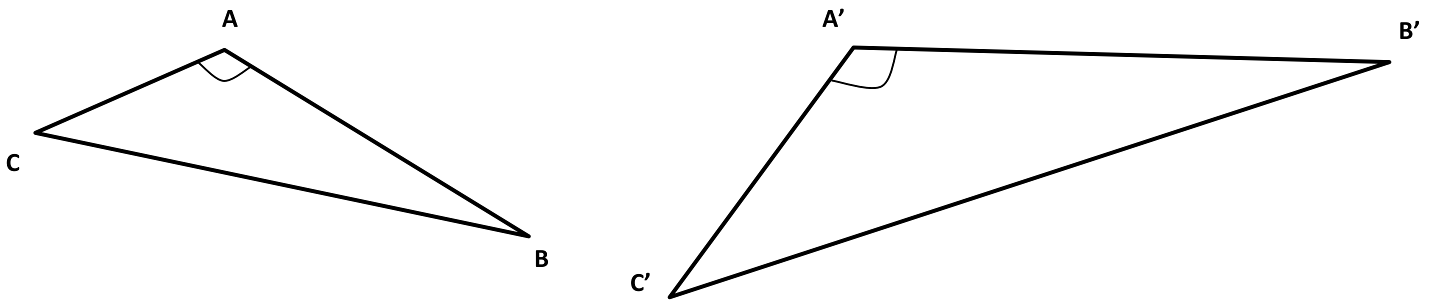
$$\text{Si } \left.\begin{array}{l}\overline{AB} = k.\overline{A'B'} \\ \overline{AC} = k.\overline{A'C'} \\ \overline{BC} = k.\overline{B'C'}\end{array}\right\} \text{ ou } \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k \Rightarrow \Delta ABC \text{ et } \Delta A'B'C' \text{ sont semblables}$$

Remarque : A partir de là, on peut donc déduire que : $\hat{A}^\circ = \hat{A}'^\circ$; $\hat{B}^\circ = \hat{B}'^\circ$ et $\hat{C}^\circ = \hat{C}'^\circ$ 1

1 : ***Les angles homologues de deux triangles semblables ont la même amplitude***

6.1.2. *Critère CAC (côté – angle – côté)*

Si deux triangles ont un angle de même amplitude compris entre des côtés homologues de longueurs proportionnelles, alors ils sont semblables.



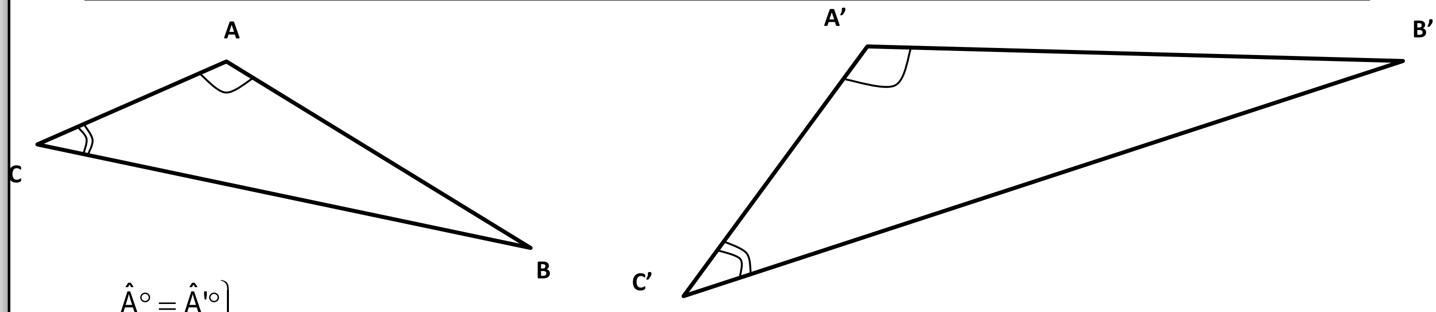
$$\textit{Si } \left.\begin{array}{l}\overline{AB} = k.\overline{A'B'} \\ \hat{A}^\circ = \hat{A}'^\circ \\ \overline{AC} = k.\overline{A'C'}\end{array}\right\} \text{ou } \left.\begin{array}{c}\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k \\ \hat{A}^\circ = \hat{A}'^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \text{ et } \Delta A'B'C' \text{ sont semblables}$$

Remarque : A partir de là, on peut donc déduire que : $\overline{BC} = k.\overline{B'C'}$; $\hat{B}^\circ = \hat{B}'^\circ$ et $\hat{C}^\circ = \hat{C}'^\circ$ 2

2 : ***Les côtés homologues de deux triangles semblables ont des longueurs proportionnelles et les angles homologues de deux triangles semblables ont la même amplitude***

6.1.3. ***Critère AA (angle – angle)***

Si deux triangles ont deux angles homologues de même amplitude, alors ils sont semblables.



Si $\left.\begin{array}{l}\hat{A}^\circ = \hat{A}'^\circ \\ \hat{C}^\circ = \hat{C}'^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \text{ et } \Delta A'B'C' \text{ sont semblables}$

<u>Remarque</u> : A partir de là, on peut donc déduire que : $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k$ et $\hat{B}^\circ = \hat{B}'^\circ$ $\square_2$

$\square_2$: ***Les côtés homologues de deux triangles semblables ont des longueurs proportionnelles et les angles homologues de deux triangles semblables ont la même amplitude***

6.1.4. ***Triangles à côtés parallèles***

Si deux triangles ont leurs côtés homologues parallèles, alors ils sont semblables

Ce cas est une déduction directe du précédent puisque deux angles à côtés (directement ou inversement) parallèles ont la même amplitude.

6.2. Notation

Si le triangle ABC est semblable au triangle A'B'C', alors tu écriras :

$$\begin{array}{c} \Delta\ A\ B\ C \\ \sim \\ \Delta\ A'\ B'\ C' \end{array}$$

Attention !! Bien disposer les sommets homologues l'un au-dessus de l'autre pour pouvoir écrire rapidement les rapports de proportion liés à cette similitude (agrandissement).

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k$$

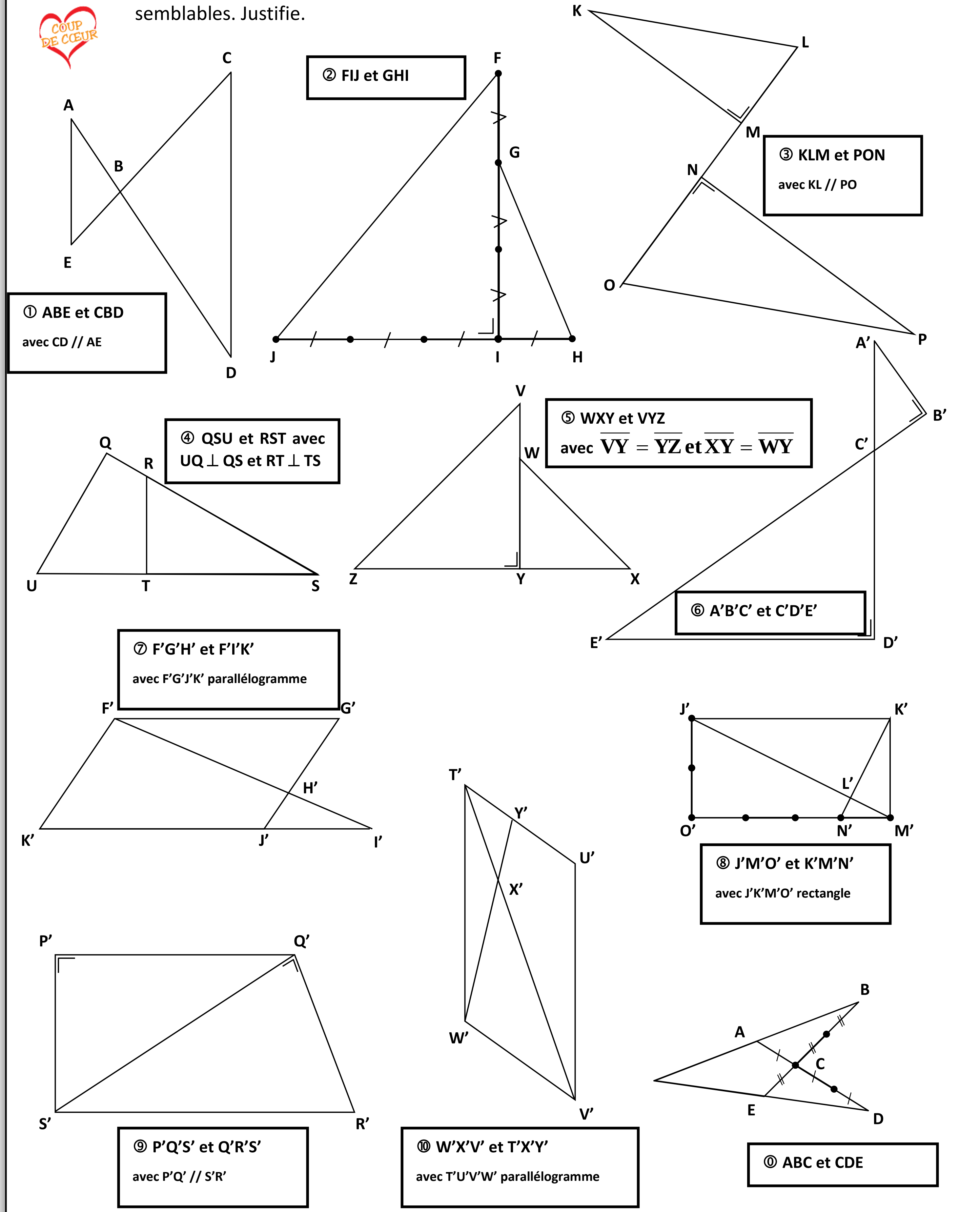
7. EXERCICES

1] Les triangles ABC et A'B'C' sont semblables et le rapport de similitude de A'B'C' par rapport à ABC est égal à « ***r*** ». Complète le tableau suivant :

	$\overline{AB}$	$\overline{AC}$	$\overline{BC}$	$\overline{A'B'}$	$\overline{A'C'}$	$\overline{B'C'}$	r
I	12	16	10	8			
II		10		16	12	14	
III	7	8	9				0,6
IV	2,2		1,8		3,6	2,7	
V				360	240	324	1,2

2] En utilisant les renseignements fournis par les dessins, détermine si les triangles sont semblables. Justifie.

COUP DE CŒUR



3] ***Vrai*** ou ***faux*** ? Justifie dans chaque cas.

Soient deux triangles ABC et A'B'C'.

a) Si $\hat{A}° = \hat{A}'° = 60°$ et si $\hat{C}° = \hat{C}'° = 30°$ alors $\begin{matrix}\Delta ABC \\ \Delta A'B'C'\end{matrix}$ VRAI – FAUX

b) Si $\hat{B}° = \hat{B}'° = 90°$ et si $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ alors $\begin{matrix}\Delta ABC \\ \Delta A'B'C'\end{matrix}$ VRAI – FAUX

c) Si $\hat{A}° = \hat{A}'° = 73°$ et si $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$ alors $\begin{matrix}\Delta ABC \\ \Delta A'B'C'\end{matrix}$ VRAI – FAUX

d) Si $\hat{A}° = \hat{A}'°, \hat{B}° = \hat{B}'°$ et $\hat{C}° = \hat{C}'°$ alors $\begin{matrix}\Delta ABC \\ \Delta A'B'C'\end{matrix}$ VRAI – FAUX

e) Si $\hat{A}° = \hat{A}'°$ et $\hat{B}° = \hat{B}'°$ et si $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$ alors $\begin{matrix}\Delta ABC \\ \Delta A'B'C'\end{matrix}$ VRAI – FAUX

f) Si ΔABC iso ΔA'B'C' alors $\begin{matrix}\Delta ABC \\ \Delta A'B'C'\end{matrix}$ VRAI – FAUX

g) Si ΔABC et ΔA'B'C' sont isocèles alors $\begin{matrix}\Delta ABC \\ \Delta A'B'C'\end{matrix}$ VRAI – FAUX

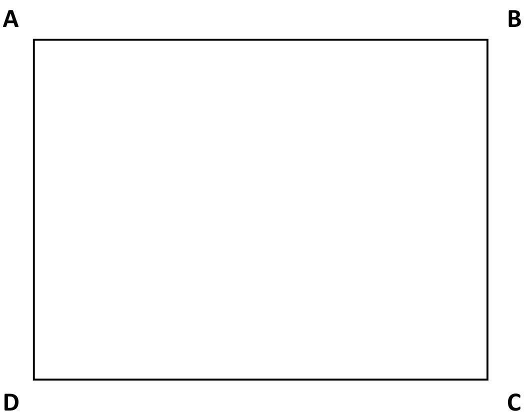
h) Si ΔABC et ΔA'B'C' sont rectangles isocèles alors $\begin{matrix}\Delta ABC \\ \Delta A'B'C'\end{matrix}$ VRAI – FAUX

i) Si $\hat{A}° = 2.\hat{A}'°$ et $\hat{B}° = 2.\hat{B}'°$ alors $\begin{matrix}\Delta ABC \\ \Delta A'B'C'\end{matrix}$ VRAI – FAUX

4] Complète le tableau suivant en sachant qu'il existe une similitude de rapport « ***r*** » qui applique la figure 1 sur la figure 2 :

Rapport	Aire de la figure 1	Aire de la figure 2
2	**25 cm²**	
5		**375 cm²**
1,5		**180 cm²**
	10 cm²	**90 cm²**

5] La figure XYZT a été effacée. A toi de la redessiner en sachant qu'elle est semblable à ABCD et que son aire vaut 3 cm².

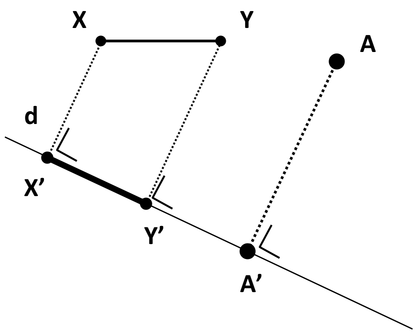


6] Dans le parallélogramme ABCD, on joint le point **A** au milieu **M** du côté [CD] et le point **C** au milieu **N** du côté [AB]. La diagonale BD est coupée en trois parties égales. Prouve-le.

8. RELATIONS METRIQUES DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

8.1. Projection orthogonale

La projection orthogonale d'un point sur une droite est le pied de la perpendiculaire abaissée du point sur la droite.



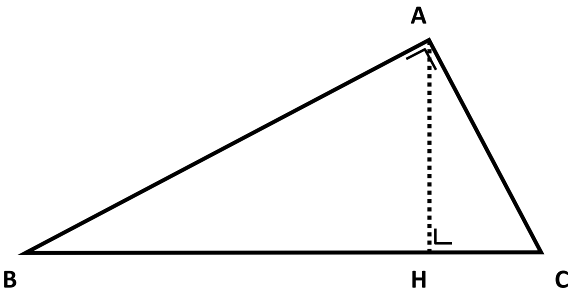
A' est la **projection orthogonale** de A sur d.

[X'Y'] est la **projection orthogonale** de [XY] sur d

8.2. Triangle rectangle, hauteur relative à l'hypoténuse et triangles semblables

En traçant la hauteur relative à l'hypoténuse d'un triangle rectangle, tu obtiens trois triangles semblables deux à deux.

En effet :



Hypothèse :

Δ ABC rectangle en A

$[AH] \perp BC$ et $H \in BC$

Thèse : les Δ ABC ; Δ HBA et Δ HAC sont semblables deux à deux

Démonstration :

- $\boxed{A}$ $B\hat{A}C° = A\hat{H}B° = A\hat{H}C° = 90°$ $\square_1$
- $\boxed{A}$ $A\hat{B}C° = A\hat{B}H° = C\hat{A}H°$

$\square_2$ $\square_3$

$\Rightarrow$ les Δ ABC ; Δ HBA et Δ HAC sont semblables 2 à 2 $\square_4$

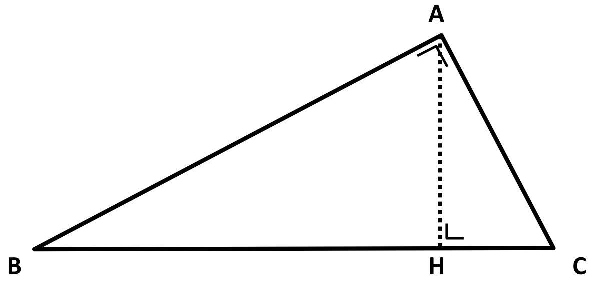
Δ B C A ∽ Δ A C H

Δ B C A ∽ Δ B A H

Δ B H A ∽ Δ A H C

$\square_1$: ***Par hypothèse.***
$\square_2$: ***Angle commun***
$\square_3$: ***Deux angles aigus à côtés perpendiculaires ont la même amplitude***
$\square_4$: ***Si deux triangles ont deux angles homologues de même amplitude, alors ils sont semblables***

8.3. Première relation métrique dans le triangle rectangle



Nous avons démontré ci-dessus que les triangles AHB et CHA étaient semblables :

$$\Delta\ BHA \sim \Delta\ AHC \;\overset{[1]}{\Rightarrow}\; \frac{\overline{BH}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{HA}}{\overline{HC}} = \left(\frac{BA}{AC}\right)$$

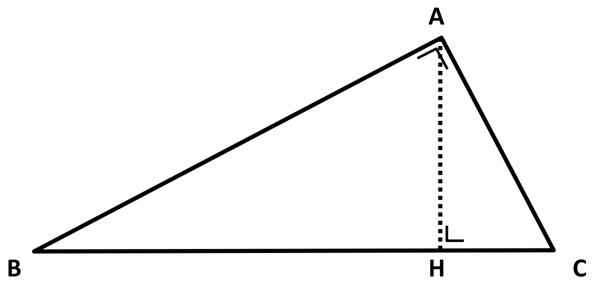
[1] : ***Les côtés homologues de deux triangles semblables ont des longueurs proportionnelles.***

De cette première égalité, nous pouvons conclure que :

Dans un triangle rectangle, la longueur de la hauteur relative à l'hypoténuse est *moyenne proportionnelle* entre les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{HA}}{\overline{HC}} \text{ ou encore } \overline{AH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{HC}$$

8.4. Deuxième relation métrique dans le triangle rectangle



Nous avons aussi démontré ci-dessus que les triangles BAC et BHA étaient semblables :

$$\Delta\ BCA \sim \Delta\ BAH \;\overset{[1]}{\Rightarrow}\; \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BH}} = \left(\frac{CA}{AH}\right)$$

[1] : ***Les côtés homologues de deux triangles semblables ont des longueurs proportionnelles.***

De manière analogue :

$$\Delta\ BCA \sim \Delta\ ACH \;\overset{[1]}{\Rightarrow}\; \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CH}} = \left(\frac{BA}{AH}\right)$$

De ces égalités, nous pouvons conclure que :

Dans un triangle rectangle, la longueur d'un côté de l'angle droit est *moyenne proportionnelle* entre la longueur de l'hypoténuse et sa projection orthogonale sur l'hypoténuse.

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BH}} \Rightarrow \overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BH} \text{ et } \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CH}} \Rightarrow \overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{CH}$$

Remarque :

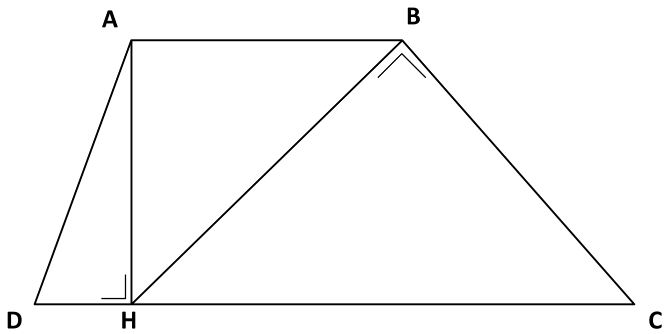
Le théorème de Pythagore peut se déduire de ces relations métriques. Je vous laisse chercher !

8.5. Exercices de calculs

1] Dans le triangle ABC rectangle en A, on trace la hauteur AH relative à l'hypoténuse. Complète le tableau suivant :

	$\overline{AB}$	$\overline{AC}$	$\overline{BC}$	$\overline{AH}$	$\overline{BH}$	$\overline{CH}$
I				8	4	
II					10	12
III	6				3	
IV			5		3	
V				$\sqrt{2}$		3
VI	$\sqrt{3}$	2				
VII		$2\sqrt{5}$		$2\sqrt{3}$		

2] Dans le trapèze ABCD dessiné ci-dessous, on donne $\overline{DH}=4;\overline{BH}=12;\overline{AH}=8$. Calcule toutes les longueurs inconnues.



3] Dans un triangle rectangle, calcule la longueur des côtés de l'angle droit sachant que la hauteur relative à l'hypoténuse divise celle-ci en deux segments respectivement de 4 et 6 cm.

4] L'hypoténuse d'un triangle rectangle mesure 4 cm. La hauteur relative à l'hypoténuse détermine sur celle-ci deux segments dont l'un mesure 3 cm. Quelle est la mesure de cette hauteur ?

5] Les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle mesurent 4 et 7 cm. On trace la hauteur relative à l'hypoténuse. Calcule la longueur des deux segments ainsi déterminés.

9. EXERCICES DE SYNTHESE

1] Dans le triangle ABC, les hauteurs [AX] et [BY] se coupent en P. Démontre que $\frac{\overline{AX}}{\overline{XC}} = \frac{\overline{XB}}{\overline{XP}}$.

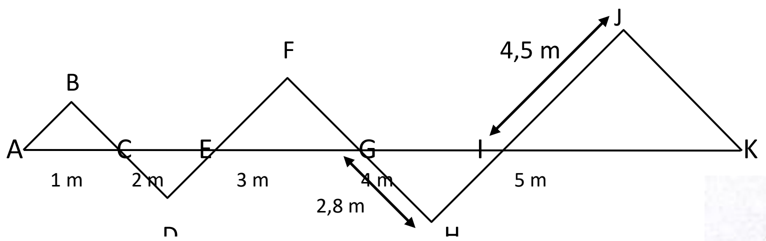
2] Soit un triangle ABC rectangle en A. Par un point M de [BC], trace une perpendiculaire à BC qui coupe AB et AC respectivement en S et R. Démontre que $\overline{BM}.\overline{MC} = \overline{MR}.\overline{MS}$.

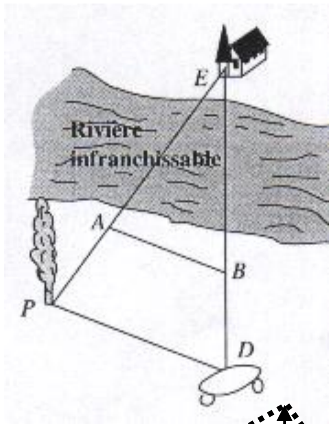
3] Deux triangles ABC et DBC ont même base et même hauteur. Une droite parallèle à BC coupe les côtés [AB] et [AC] respectivement en X et Y ; et les côtés [DB] et [DC] respectivement en Z et T. Démontre que les segments [XY] et [ZT] sont isométriques.

4] Dans un triangle ABC, on trace la médiane [AM]. Trace une droite parallèle à BC qui coupe [AB], [AM] et [AC] respectivement aux points E, H et F. Démontre que [EH] et [HF] sont isométriques.

5] Dans un parallélogramme ABCD, une droite d passant par A coupe la diagonale [BD] en M, le côté [BC] en N et le prolongement de [DC] en P. Démontre que $\overline{AM}^2 = \overline{MN}.\overline{MP}$.

6] Sachant que $[AB]$ // $[DF]$ // $[HJ]$ et que $[BD]$ // $[FH]$ // $[JK]$ prouver que la longueur de la ligne brisée ABDFHJK est égale à 24.

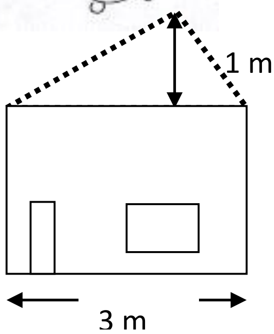




7] Par un système de visées, on place les piquets A et B alignés respectivement avec P, E et D, E de façon que [AB] // [DP].

On mesure (en hm) : $\overline{DB} = 3, \overline{AB} = 3$ et $\overline{DP} = 5$.

Calculer la distance entre le dolmen D et l'église E.



8] Pour Noël, Jean voudrait garnir sa toiture d'une guirlande suivant le dessin repris à côté. Pourrais-tu l'aider à calculer la longueur de la guirlande afin qu'il puisse effectuer ses achats ?

Pour ton information, sache que le triangle représentant la toiture est rectangle.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

MATH POUR RÉUSSIR : PAGES 121 À 130

10. RAPPELS SUR LES ANGLES (