Collège Saint-Barthélemy

Y. Michiels

Mathématique – Troisième année

CHAPITRE 12

Systèmes de 2 équations du 1er degré à 2 inconnues

OBJECTIFS – UAA5 : Les outils algébriques

Connaitre

- Interpréter graphiquement la solution d'une équation et d'un système d'équations à deux inconnues.

Appliquer

- Déterminer algébriquement et graphiquement le point d'intersection des graphiques de deux fonctions du premier degré (et/ou constantes)
- Résoudre un système d'équations linéaire à deux inconnues en adaptant la technique utilisée à sa forme initiale.

Transférer

- Résoudre des problèmes mettant en jeu une inéquation du premier degré ou un système d'équations à deux inconnues.

EXPLORATION : SYSTEMES DE DEUX EQUATIONS DU PREMIER DEGRE A DEUX INCONNUES

1. *Pour imprimer les photos du Cyclo (format 10x15) via internet, M. Nulens consulte les sites dont voici les tarifs :*

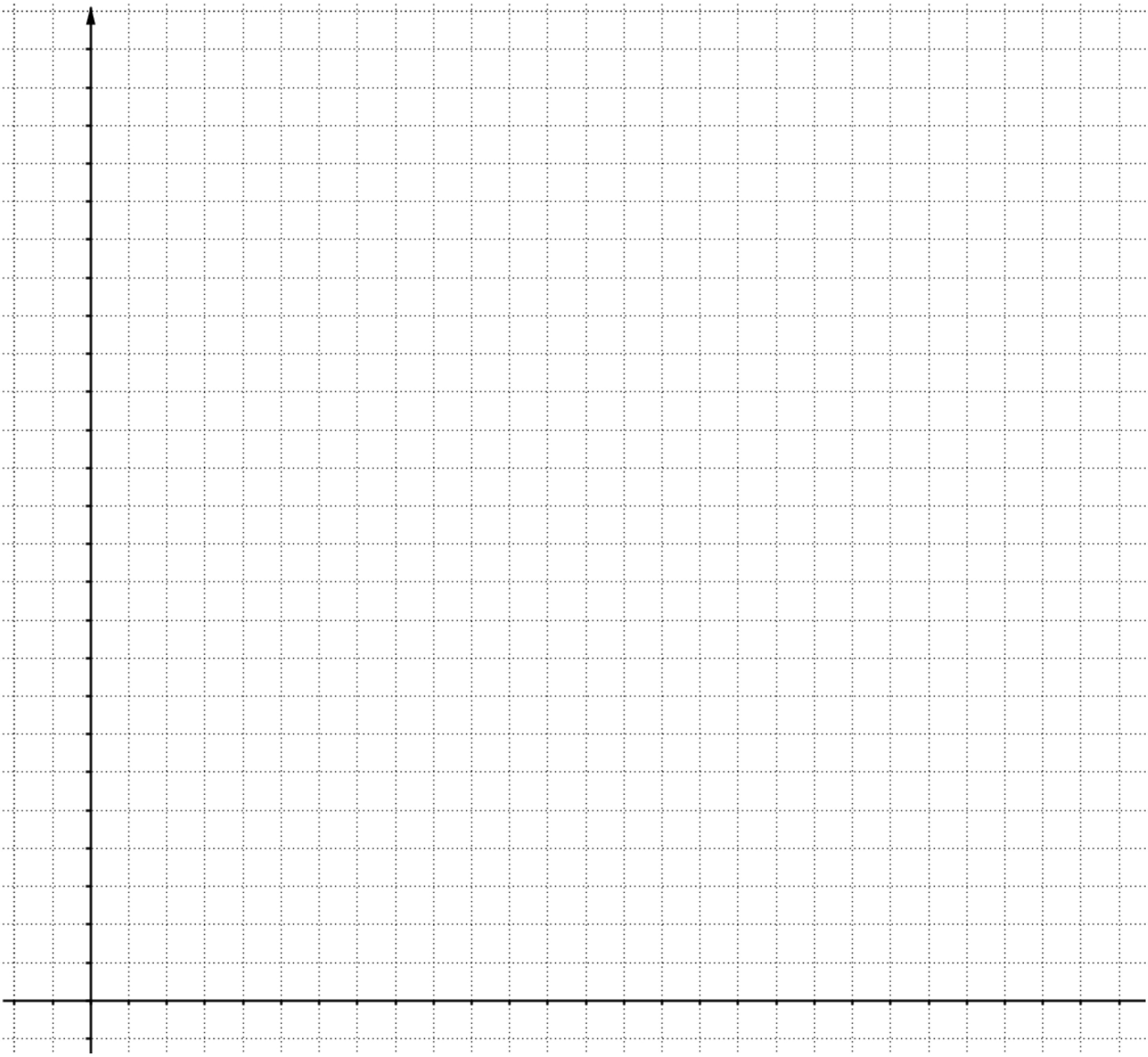
- *Tarif 1 : 0,2 € la photo, frais de port compris*
- *Tarif 2 : 0,15€ la photo mais les frais de port s'élève à 2,5€*
- *Tarif 3 : 0,25€ les 100 premières puis 0,1€ pour les suivantes*

Si tu désignes par « x » le nombre de photos commandée et par « y » le prix total à payer :

1] Pour chaque tarif, exprime y en fonction de x ;

2] Représente dans le même repère cartésien le prix à payer pour chaque tarif en fonction du nombre de photos commandées (de 10 en 10 photos) ;

3] Utilise ta représentation graphique pour déterminer le tarif le plus avantageux en fonction du nombre d'heure de location.



2. *Pour Saint-Bar Cyclo, on décide de confectionner des tee-shirts. Trois marchands proposent les tarifs suivants :*

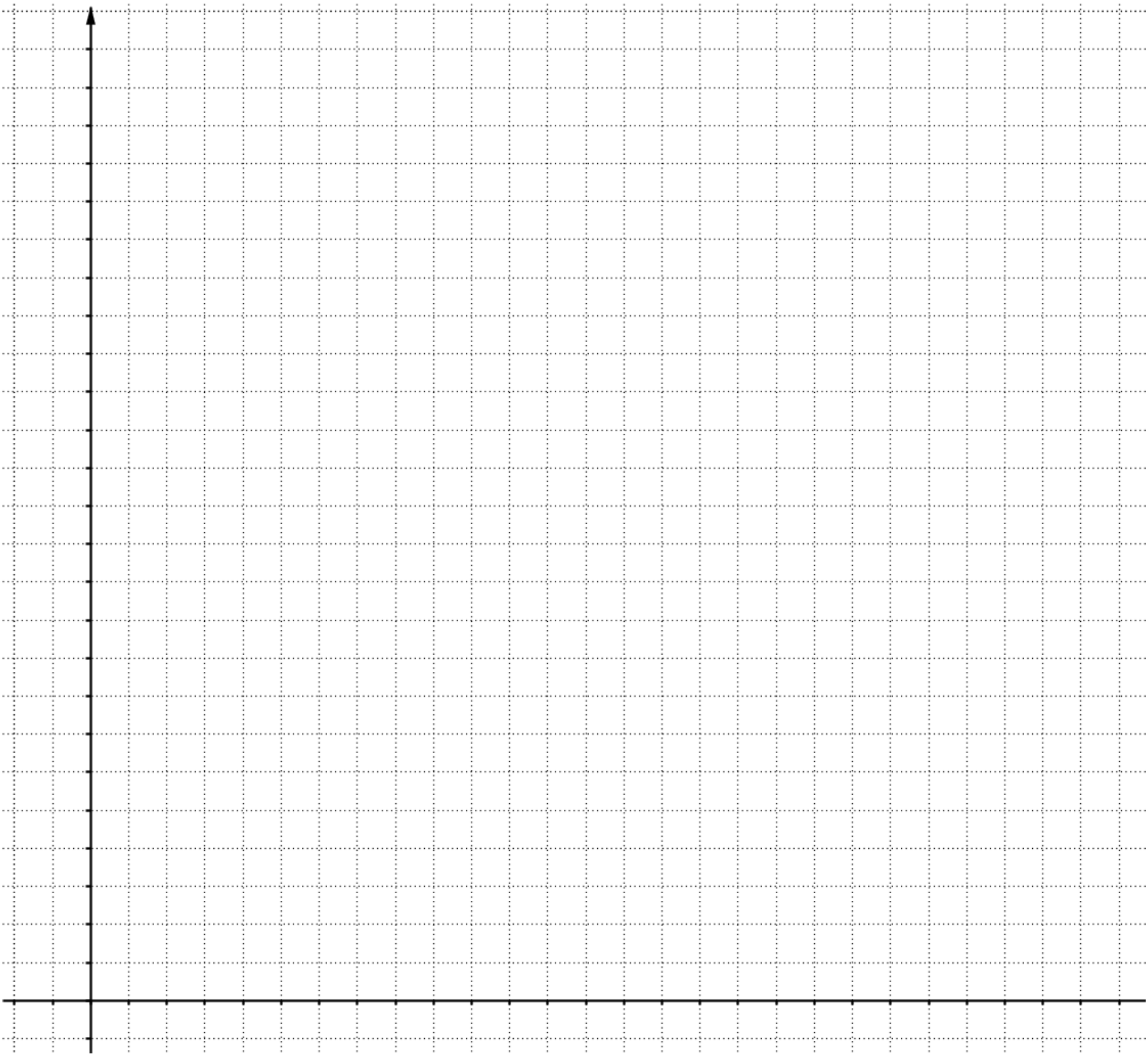
- *Tarif 1 : 70€ de forfait pour le logo plus 3€ le tee-shirt*
- *Tarif 2 : 6€ le tee-shirt*
- *Tarif 3 : 50€ de forfait pour le logo plus 5€ le tee-shirt*

Si tu désignes par « x » le nombre de tee-shirts commandés et par « y » le prix total à payer :

1] Pour chaque tarif, exprime y en fonction de x ;

2] Représente dans le même repère cartésien le prix à payer pour chaque tarif en fonction du nombre de tee-shirts commandés ;

3] Utilise ta représentation graphique pour déterminer le tarif le plus avantageux en fonction du nombre de tee-shirts commandés.



3. *Romane possède une tablette pouvant recevoir une carte SIM. Elle hésite entre deux formules en promotion chez un opérateur :*

	Cout mensuel fixe	***Cout par mégabyte (MB) téléchargé***
Formule A	10,00 €	Aucun
Formule B	0,01 € / MB	0,05 € / MB

Au-delà de quel volume de téléchargement mensuel exprimé en mégabytes (MB) la formule A commencera-telle à être plus intéressante que la formule B ?

ÉCRIS ton raisonnement et tes calculs.

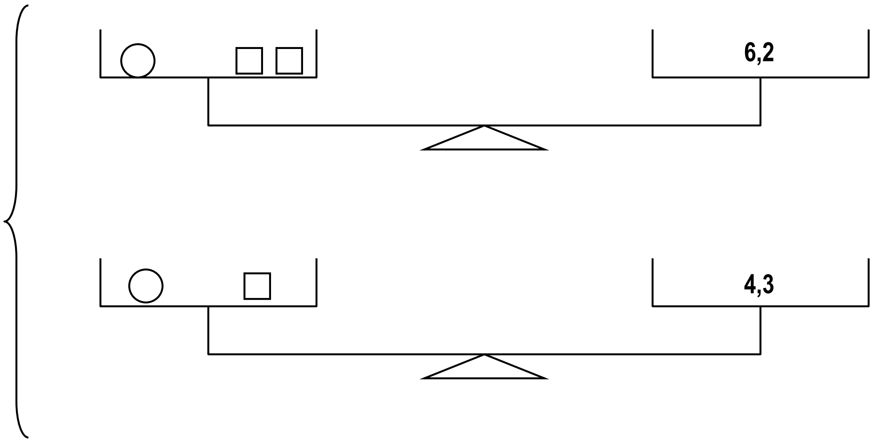
4. *Nadège possède une tablette pouvant recevoir une carte SIM. Elle hésite entre deux formules en promotion chez un opérateur :*

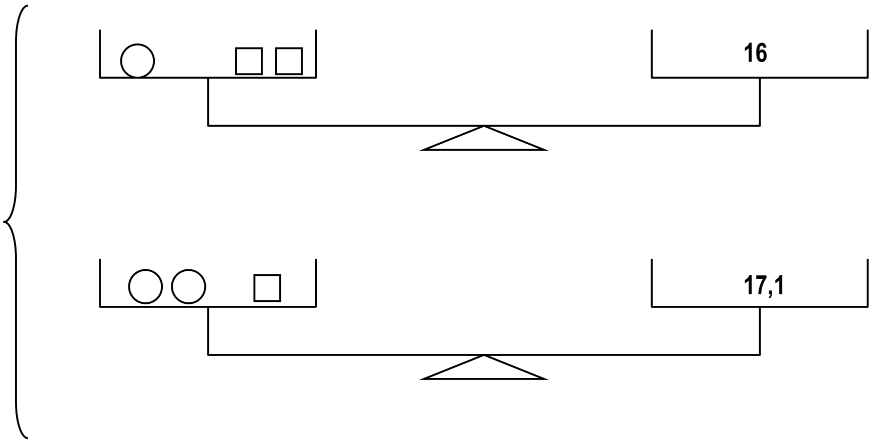
	Cout mensuel fixe	***Cout par mégabyte (MB) téléchargé***
Formule A	12,80 €	Aucun
Formule B	0,03 € / MB	0,07 € / MB

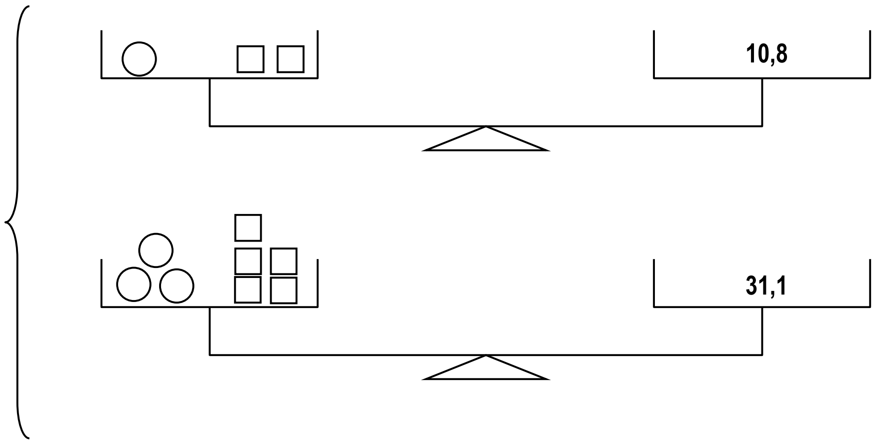
Au-delà de quel volume de téléchargement mensuel exprimé en mégabytes (MB) la formule A commencera-telle à être plus intéressante que la formule B ?

ÉCRIS ton raisonnement et tes calculs.

5. Calcule la valeur du cercle et celle du carré dans les trois cas suivants :



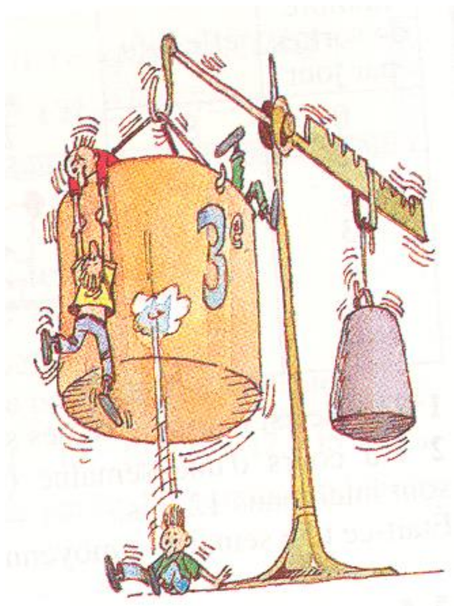




Traduis ces résolutions en expressions algébriques.

6. Résous le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x - 5y = 7 \end{cases}$$



SYNTHESE : EQUATIONS DU PREMIER DEGRE A DEUX INCONNUES ET SYSTEMES

1. EQUATIONS DU PREMIER DEGRE A DEUX INCONNUES

1.1. Une équation du premier degré à deux inconnues

Exemple :

Cherche deux nombres dont la somme est 12. Note les « x » et « y ».
La condition sur « x » et « y » se traduit par l'équation :

$$x + y = 12$$

Cette équation est une ***équation à deux inconnues***. Elle possède une ***infinité de solutions***. Chaque solution est un ***couple*** de réels (x ; y) qui vérifient l'égalité. Si tu places tous ces points dans un repère cartésien, tu obtiens la droite qui a pour équation : $x + y - 12 = 0$

Voici quelques solutions :

x	y	(x ; y)
0	12	(0 ; 12)
1	11	(1 ; 11)
2	10	(2 ; 10)
3,4	8,6	(3,4 ; 8,6)
…		

L'équation $a.x + b.y + c = 0$ est la forme générale d'une équation du premier degré à deux inconnues (avec $a \neq 0$; $b \neq 0$ et c quelconque).

1.2. Système de deux équations du premier degré à deux inconnues

Exemple :

Cherche deux nombres dont la somme est 12 et dont la différence est 5. Note les « x » et « y ».
Les deux conditions se traduisent par deux équations :

$x + y = 12$ et $x - y = 5$

Les deux équations s'écrivent avec une accolade pour signifier que les deux conditions doivent être vérifiées en même temps et constituent un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

Résoudre un système, c'est chercher les couples de nombres qui vérifient à la fois les deux équations. De tels couples de nombres sont appelés solutions du système. Ainsi, le couple (8,5 ; 3,5) est une solution du système puisque :

$8, 5 + 3,5 = 12$ et $8,5 - 3,5 = 5$

Par contre, le couple (8 ; 4) n'est pas solution :

$8 + 4 = 12$ mais $8 - 4 \neq 5$

Un système de deux équations du premier degré à deux inconnues s'écrit sous la forme :
$$\begin{cases} a.x + b.y + c = 0 \\ a'.x + b'.y + c' = 0 \end{cases}$$ **où a, b, c, a', b' et c' sont des réels**

2. METHODES DE RESOLUTIONS DE SYSTEMES DE DEUX EQUATIONS DU PREMIER DEGRE A DEUX INCONNUES

2.1. Méthode de substitution

Soit à résoudre le système :

$$\begin{cases} x + 2y = 5 & (1) \\ 2x - 3y = -4 & (2) \end{cases}$$

Comme le coefficient de « x » est 1 dans la première équation, tu peux facilement y isoler l'inconnue « x » et l'exprimer en fonction de « y » :

$$\begin{cases} x = 5 - 2y & (3) \\ 2x - 3y = -4 & (2) \end{cases}$$

Tu peux remplacer cette inconnue dans l'équation (2) puisque la valeur de « x » doit être la même pour les deux équations :

$$\begin{cases} x = \boldsymbol{5 - 2y} & (3) \\ 2 \cdot \boldsymbol{(5 - 2y)} - 3y = -4 & (4) \end{cases}$$

Dans l'équation (4), tu peux trouver aisément la valeur de « y » :

$$\begin{cases} x = 5 - 2y & (3) \\ 10 - 4y - 3y = -4 & (4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2y & (3) \\ -7y = -14 & (4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2y & (3) \\ y = 2 & (4) \end{cases}$$

En remplaçant la valeur de y dans l'équation (3), tu trouves la valeur de « x » :

$$\begin{cases} x = 5 - 2.(\boldsymbol{2}) & (3) \\ y = \boldsymbol{2} & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 & (3) \\ y = \boldsymbol{2} & (4) \end{cases}$$

La solution du système est le couple (1 ; 2).

S = $\{(1 ; 2)\}$

2.2. Méthode de combinaison

Soit à résoudre le système :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 & (1) \\ 2x - 5y = -4 & (2) \end{cases}$$

Dans ce système, isoler « x » ou « y » t'amène à travailler avec des fractions. Dans ce cas, tu appliques le principe de multiplication aux deux équations du système de manière telle que les coefficients de « x » de chaque équation du nouveau système soient des nombres opposés. Pour cela, tu multiplies les deux membres de (1) par 2 et les deux membres de (2) par –3 :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 & (1) \\ 2x - 5y = -4 & (2) \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{.\,2} \\ \mathbf{.\,(-3)} \end{array} \right.$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} 6x + 4y = 10 & (3) \\ -6x + 15y = 12 & (4) \end{cases}$$

En additionnant membre à membre les égalités (3) et (4) obtenues, tu « élimines » la variable « x » :

$$19y = 22 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{22}{19}$$

En remplaçant dans (1), y par $\frac{22}{19}$, tu détermines la valeur de « x » en résolvant l'équation :

$$3x + 2.\frac{22}{19} = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{51}{57} = \frac{17}{19}$$

La solution du système est le couple $(\frac{17}{19} ; \frac{22}{19})$.

$$S = \{(\frac{17}{19} ; \frac{22}{19})\}$$

Remarque :

Tu peux aussi appliquer la méthode de combinaison deux fois ; une fois pour éliminer « y » et l'autre pour éliminer « x ».

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x - 5y = -4 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \mathbf{.\ 2} \\ \mathbf{.\ (-3)} \end{array} \right. \qquad \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x - 5y = -4 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \mathbf{.\ 5} \\ \mathbf{.\ 2} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 6x + 4y = 10 \\ -6x + 15y = 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} 15x + 10y = 25 \\ 4x - 10y = -8 \end{cases}$$

$$19y = 22 \qquad 19x = 17$$

$$y = \frac{22}{19} \qquad x = \frac{17}{19}$$

La solution du système est le couple $(\frac{17}{19} ; \frac{22}{19})$.

$$S = \{(\frac{17}{19} ; \frac{22}{19})\}$$

2.3. Interprétation graphique et discussion

Dans un repère cartésien, les points dont les coordonnées vérifient une équation du premier degré à deux inconnues sont sur une droite (voir chapitre sur les fct. et équation de droites).

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues, c'est déterminer les couples de nombres qui vérifient les deux équations à la fois, c'est-à-dire les coordonnées des points qui se trouvent sur les deux droites (les coordonnées des éventuels points d'intersection).

Or, deux droites peuvent être :

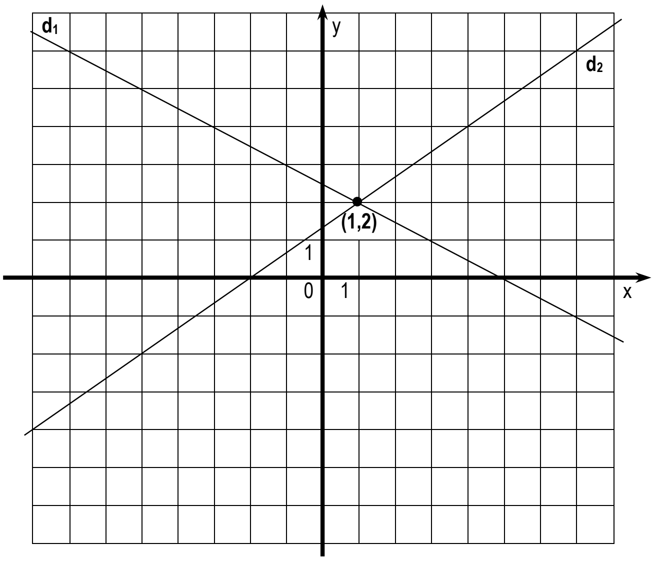
- sécantes (un seul point commun) ;
- parallèles distinctes (pas d'intersection) ;
- parallèles confondues (tous les points communs).

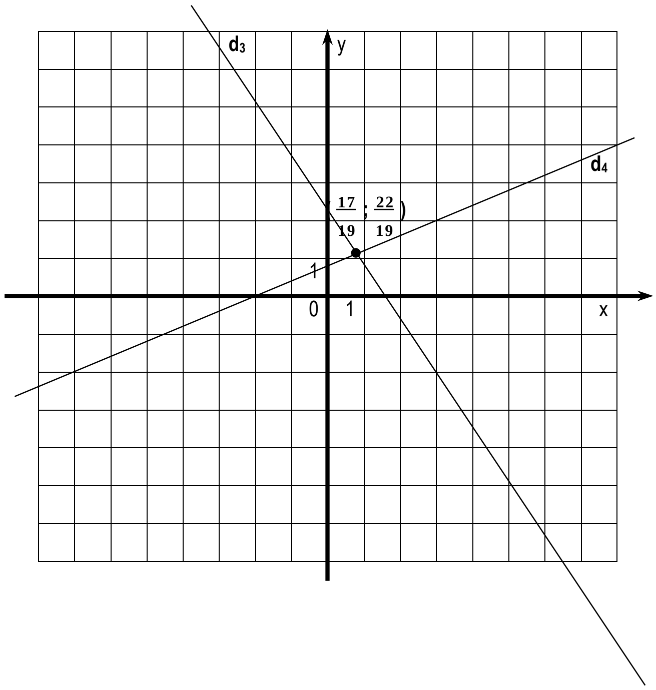
Par conséquent, un système de deux équations à deux inconnues peut avoir soit une solution, soit zéro solution (système impossible), soit une infinité de solution (système indéterminé).

2.3.1. ***Une solution***

Les systèmes résolus dans les méthodes de substitution et de combinaison ont chacun une solution :

$$\begin{cases} x + 2y = 5 & (1) \\ 2x - 3y = -4 & (2) \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 2y = 5 & (3) \\ 2x - 5y = -4 & (4) \end{cases}$$



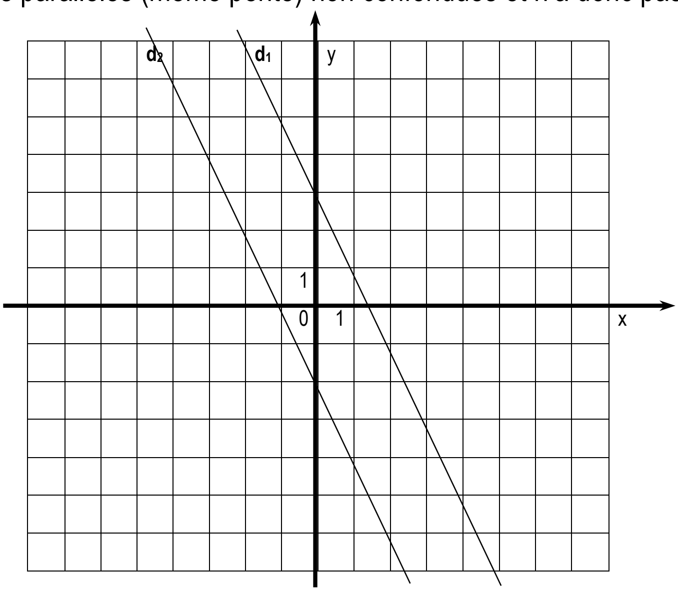


2.3.2. ***Pas de solution***

Le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = -4 \end{cases} \text{ qui peut s'écrire sous la forme } \begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = -2x - 2 \end{cases}$$

est constitué de deux droites parallèles (même pente) non confondues et n'a donc pas de solution.



Le système est **impossible**.

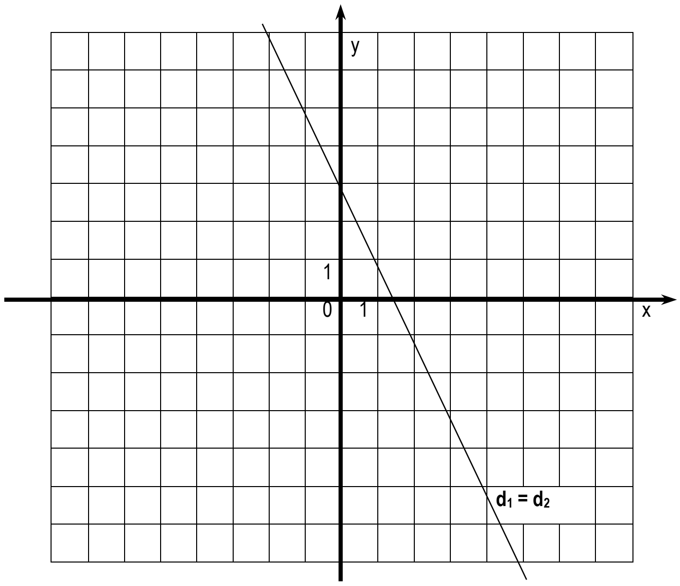
S = { } ou S = ∅

2.3.3. ***Une infinité de solutions***

Dans le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 6 \end{cases}$$

les deux équations du système sont des équations ***équivalentes*** : tu passes de la première à la deuxième en multipliant les deux membres par 2. Le système est constitué de deux droites parallèles (même pente et même ordonnée à l'origine) confondues. Les deux équations ont donc les mêmes solutions : tous les points de cette droite.



Le système est **indéterminé**.

$S = \{(x\,;\,y) \mid x \in R \text{ et } y = -2x + 3\}$ ou $S = \{(x\,;\,-2x + 3) \mid x \in R\}$

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES
MATH POUR RÉUSSIR : PAGES 36 À 44