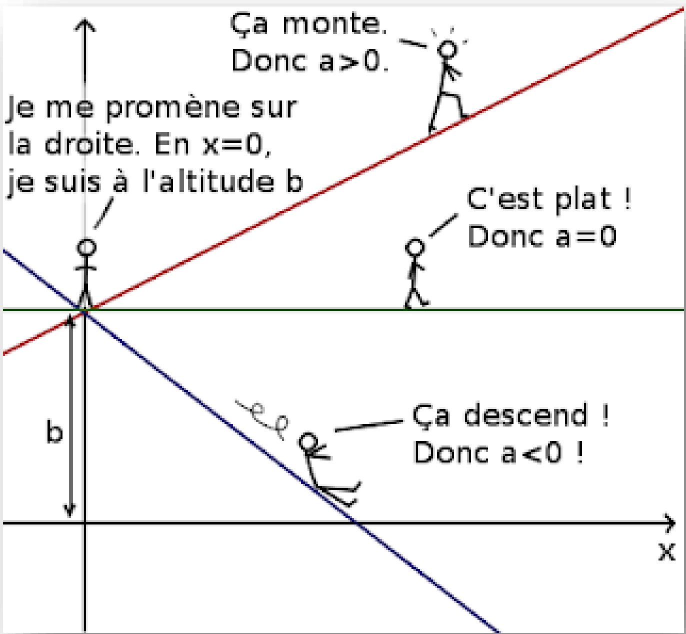
UAA 4 : Fonction du premier degré

OBJECTIFS – UAA4 : Premier degré



Connaitre

- Se servir d'un graphique pour répondre à des questions concernant certaines valeurs de la variable ou de ses images.
- Donner une interprétation graphique de m et p dans l'équation y = mx + p.
- Associer des fonctions du type f(x) = mx et f(x) = mx + p à leur graphique ou tableau de nombres, reconnaître qu'une fonction exprime une proportionnalité à partir de son tableau, de son graphique, de son expression analytique.
- Identifier les paramètres ***m*** et ***p*** dans un tableau de nombres, sur un graphique ou à partir de son expression analytique.

Appliquer

- A partir de graphiques de fonctions :
  - Résoudre des équations et inéquations de type : f(x) = g(x), f(x) < g(x), f(x) > g(x).
- Déterminer si un point dont on connaît les coordonnées appartient ou non au graphique d'une fonction dont on connaît l'expression analytique.
- Tracer le graphique d'une fonction du premier degré et d'une fonction constante.
- Déterminer les paramètres ***m*** et ***p*** d'une fonction répondant à certaines conditions.
- A partir d'un des aspects (tableau, graphique, formule) d'une fonction du premier degré, déterminer les deux autres.
- Déterminer algébriquement et graphiquement le point d'intersection des graphiques de deux fonctions du premier degré (et/ou constantes)
- Résoudre une inéquation du premier degré.

Transférer

- Tracer le graphique d'une fonction qui répond aux conditions données.
- Traduire une situation contextualisée par une fonction, une équation ou inéquation du premier degré.
- Résoudre un problème nécessitant la recherche d'éléments caractéristiques du graphique d'une fonction.

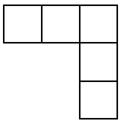
EXPLORATION : PREMIER DEGRE

1. *Une variable en fonction de l'autre*

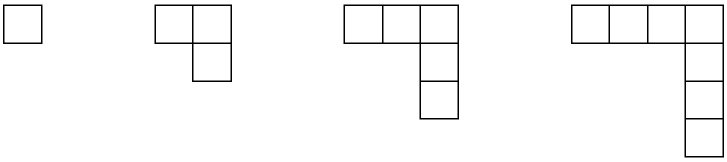
LES GNOMONS

Un gnomon est un cadran solaire primitif. Mais, les Pythagoriciens les représentaient par une figure géométrique formée de deux barrettes de même longueur ; l'une horizontale et l'autre verticale.

Exemple :

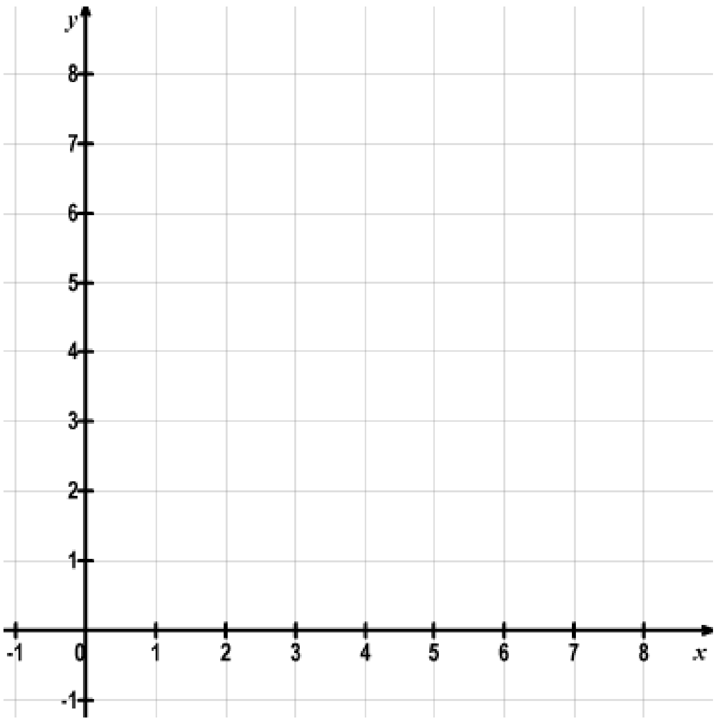


En te basant sur la représentation des 4 premiers gnomons :



a) Complète le tableau suivant et établis ainsi la formule qui te permet de déterminer le nombre de petits carrés dans le « $x^{ième}$ » gnomon.

Numéro du gnomon (x)	**Nbre de petits carrés (y)**	**Accroissement**	**(x ; y)**
1			
2			
3			
4			
…			
7			
12			
30			
x			
	57		
	123		



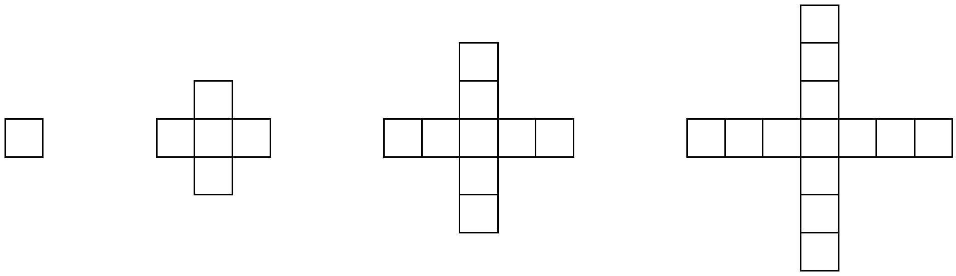
a) Si « x » représente le numéro du gnomon et « y » le nombre de petits carrés, exprime y en fonction de « x ».

b) Place tous les couples solutions (x ; y) dans le repère cartésien ci-dessus.

c) Tous ces points sont-ils alignés ?

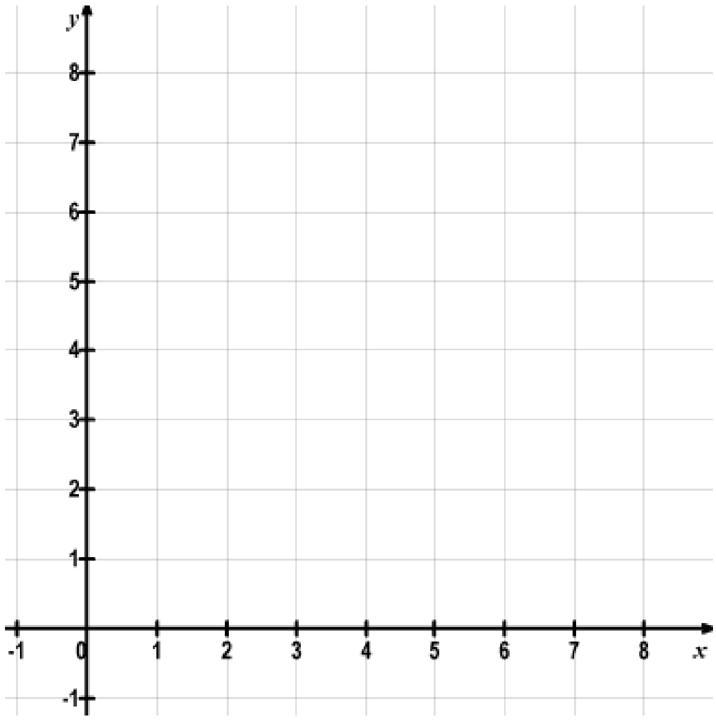
LES NOMBRES CROIX

En te basant sur la représentation des 4 premiers nombres croix :



a) Complète le tableau suivant et établis ainsi la formule qui te permet de déterminer le nombre de petits carrés dans le « $x^{ième}$ » nombre croix.

Numéro du Nbre Croix (x)	Nbre de petits carrés (y)	Accroissement	(x ; y)
1			
2			
3			
4			
…			
7			
12			
30			
x			
79			
143			



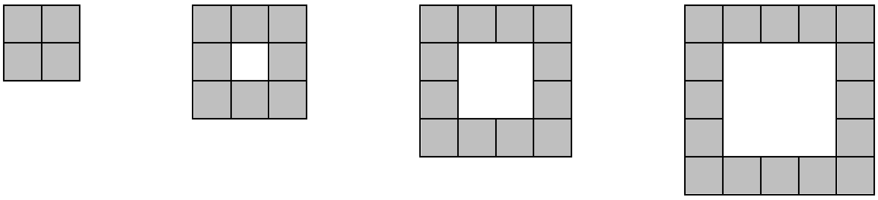
b) Si « x » représente le numéro du nombre croix et « y » le nombre de petits carrés, exprime y en fonction de « x ».

c) Place tous les couples solutions (x ; y) dans le repère cartésien ci-dessus.

d) Tous ces points sont-ils alignés ?

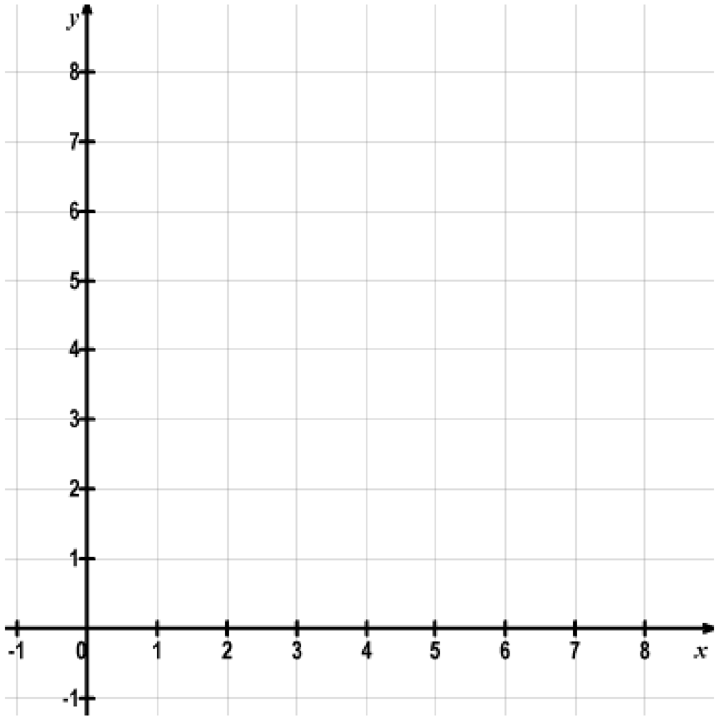
LES NOMBRES CADRES

En te basant sur la représentation des 4 premiers nombres cadres :



a) Complète le tableau suivant et établis ainsi la formule qui te permet de déterminer le nombre de petits carrés « gris » dans le « x^{ième} » nombre cadre.

Numéro du Nbre cadre (x)	Nbre de petits carrés (y)	Accroissement	(x ; y)
1			
2			
3			
4			
…			
7			
12			
30			
x			
79			
143			



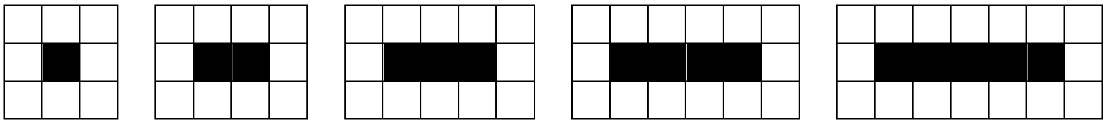
b) Si « x » représente le numéro du nombre cadre et « y » le nombre de petits carrés « gris », exprime y en fonction de « x ».

c) Place tous les couples solutions (x ; y) dans le repère cartésien ci-dessus.

d) Tous ces points sont-ils alignés ?

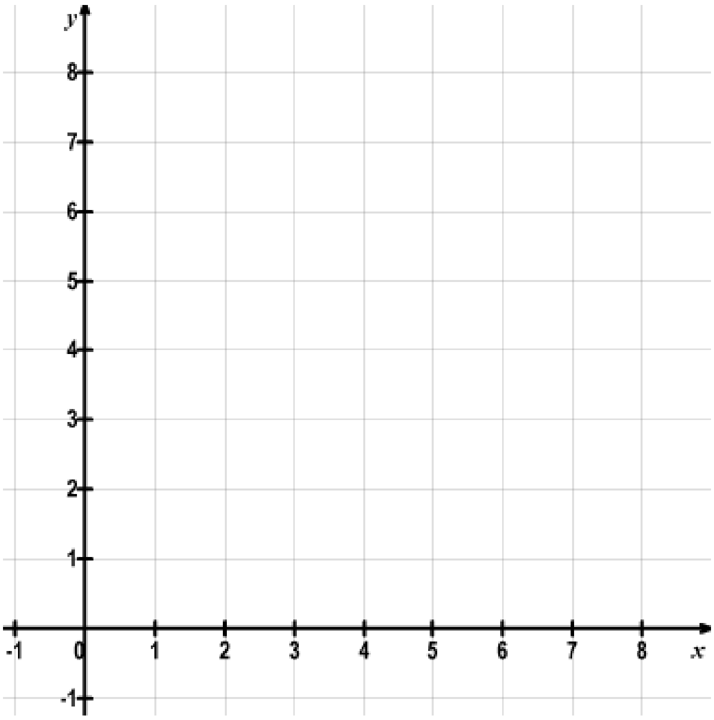
CARRES BLANCS ET CARRES NOIRS

Etablis la formule qui permet de calculer le nombre de carrés blancs en fonction du nombre de carrés noirs (aide-toi du tableau ci-dessous).



a) Complète le tableau suivant et établis ainsi la formule qui te permet de déterminer le nombre de petits carrés blancs en fonction du nombre de carrés noirs.

Nbre de carrés noirs (x)	Nbre de carrés blancs (y)	Accroissement	(x ; y)
1			
2			
3			
4			
…			
7			
12			
30			
x			
79			
143			



b) Si « x » représente le nombre de carrés noirs et « y » le nombre de carrés blancs, exprime y en fonction de « x ».

c) Place tous les couples solutions (x ; y) dans le repère cartésien ci-dessus.

d) Tous ces points sont-ils alignés ?

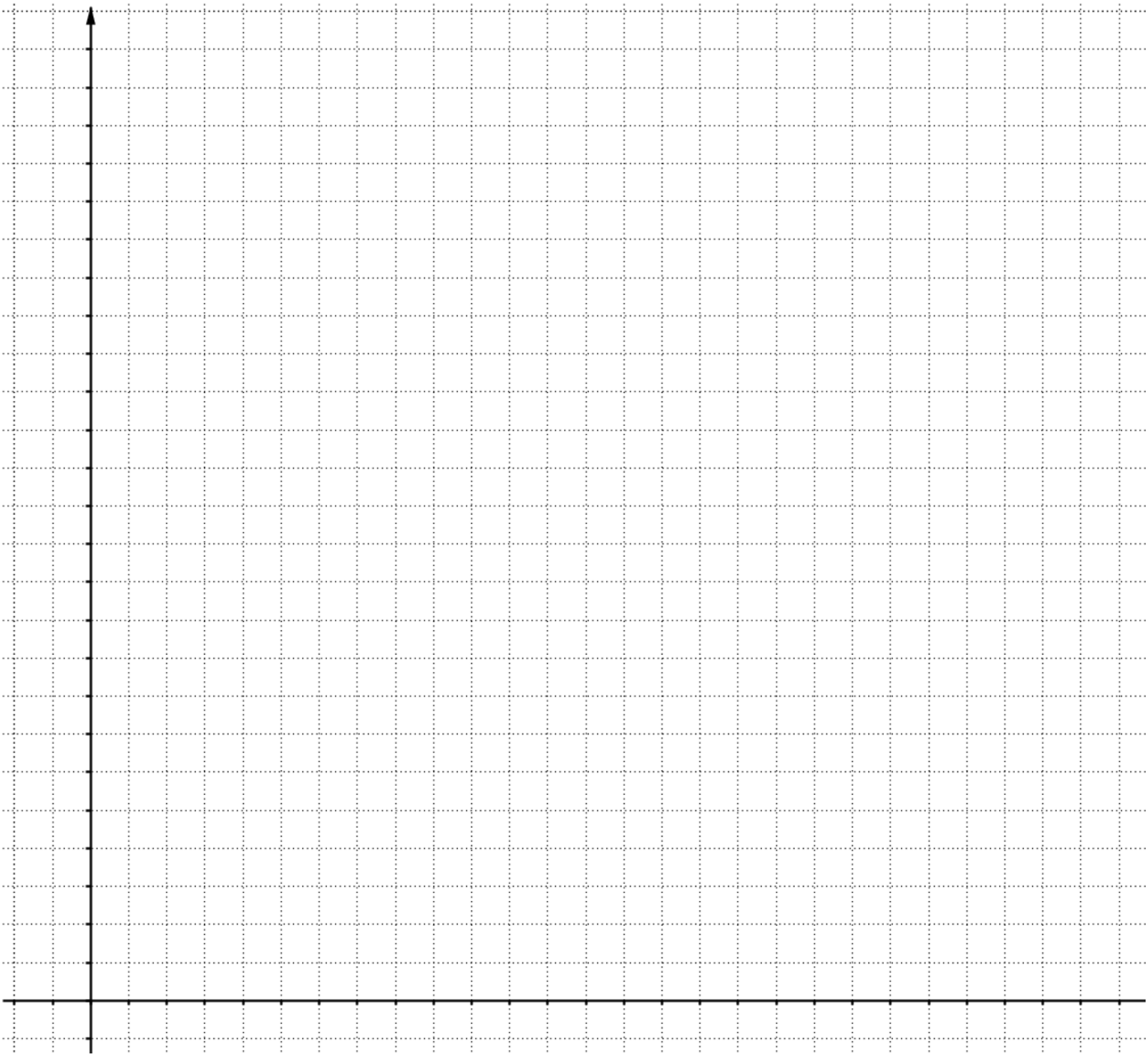
2. QUAND IL FAUT CHOISIR…

a) *A la côte* belge*, trois loueurs de VTT proposent les tarifs suivants :*

- *Tarif 1 : 120€ le forfait pour la semaine*
- *Tarif 2 : 8€ l'heure*
- *Tarif 3 : 36€ de forfait pour la semaine plus 4€ l'heure*

Si tu désignes par « x » le nombre d'heures d'utilisation d'un VTT et par « y » le prix total à payer :

1] Pour chaque tarif, exprime y en fonction de x ;
2] Représente dans le même repère cartésien le prix à payer pour chaque tarif en fonction du nombre d'heures d'utilisation ;
3] Utilise ta représentation graphique pour déterminer le tarif le plus avantageux en fonction du nombre d'heure de location.



b) *Pour* Saint-*Bar Cyclo, on décide de confectionner des tee-shirts. Trois marchands proposent les tarifs suivants :*

- *Tarif 1 : 60€ de forfait pour le logo plus 3€ le tee-shirt*
- *Tarif 2 : 6€ le tee-shirt*
- *Tarif 3 : 40€ de forfait pour le logo plus 5€ le tee-shirt*

Si tu désignes par « x » le nombre de tee-shirts commandés et par « y » le prix total à payer :

1] Pour chaque tarif, exprime y en fonction de x ;

2] Représente dans le même repère cartésien le prix à payer pour chaque tarif en fonction du nombre de tee-shirts commandés ;

3] Utilise ta représentation graphique pour déterminer le tarif le plus avantageux en fonction du nombre de tee-shirts commandés.

c) *Le salaire d'un vendeur de salons* dépend *des ventes qu'il réalise. Voici trois contrats reçus par M. Lecuir :*

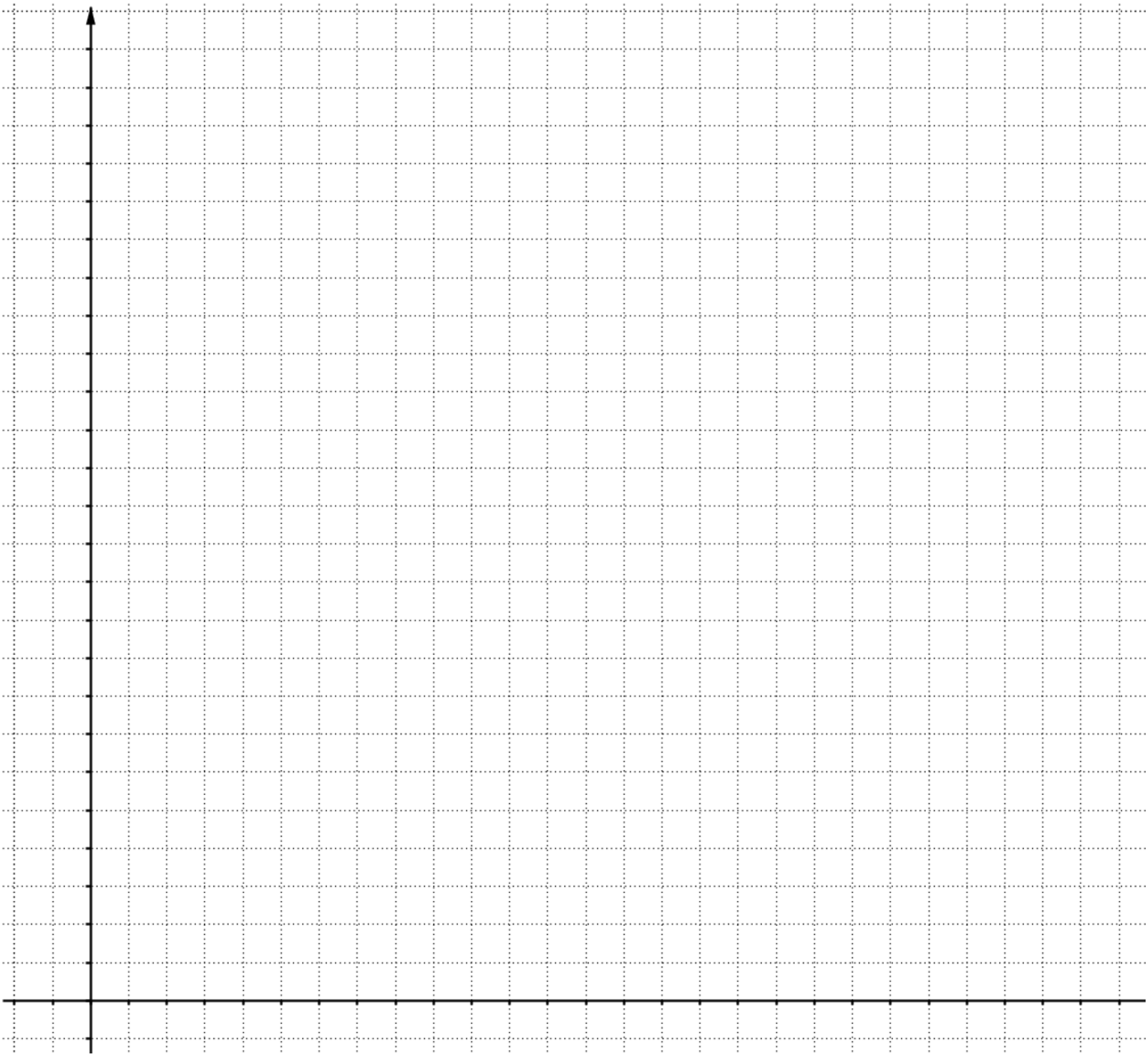
- *Proposition 1 : 1000€ de fixe plus 120€ par salon vendu ;*
- *Proposition 2 : pas de fixe mais 180€ par salon vendu ;*
- *Proposition 3 : 1900€ quelques soient les ventes.*

Si tu désignes par « x » le nombre de salons vendus et par « y » le salaire total perçu :

1] Pour chaque proposition, exprime y en fonction de x ;

2] Représente dans le même repère cartésien le salaire perçu en fonction du nombre de salons vendus ;

3] Utilise ta représentation graphique pour déterminer la proposition la plus avantageuse en fonction du nombre de salons vendus.

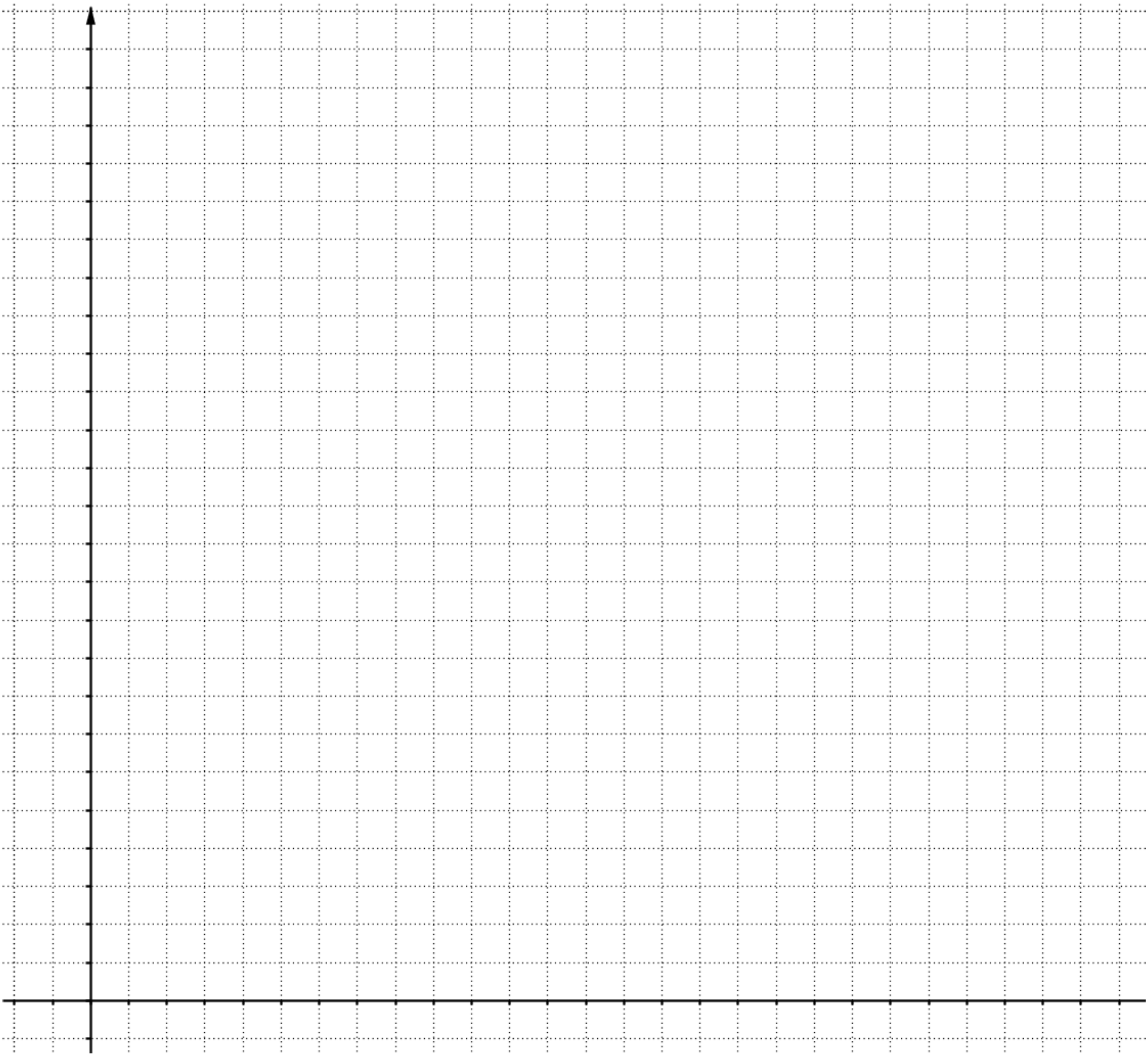


d) *Le salaire* mensuel *d'un joueur de football du Standard dépend des points récoltés en championnat. Voici trois contrats reçus par M.Mesnon :*

- *Proposition 1 : 1000€ de fixe plus 130€ par point pris ;*
- *Proposition 2 : pas de fixe mais 230€ par point pris ;*
- *Proposition 3 : 2600€ quelques soient les points récoltés.*

Si tu désignes par « x » le nombre de points pris en championnat et par « y » le salaire mensuel total perçu :

1] Pour chaque proposition, exprime y en fonction de x ;
2] Représente dans le même repère cartésien le salaire perçu en fonction du nombre de points pris ;
3] Utilise ta représentation graphique pour déterminer la proposition la plus avantageuse en fonction du nombre de points pris.



e) *Romane possède une tablette pouvant recevoir une carte SIM. Elle hésite entre deux formules en promotion chez un opérateur :*

	Cout mensuel fixe	***Cout par mégabyte (MB) téléchargé***
Formule A	10,00 €	Aucun
Formule B	0,01 € / MB	0,05 € / MB

Au-delà de quel volume de téléchargement mensuel exprimé en mégabytes (MB) la formule A commencera-telle à être plus intéressante que la formule B ?

ÉCRIS ton raisonnement et tes calculs.

f) *Nadège possède une tablette pouvant recevoir une carte SIM. Elle hésite entre deux formules en promotion chez un opérateur :*

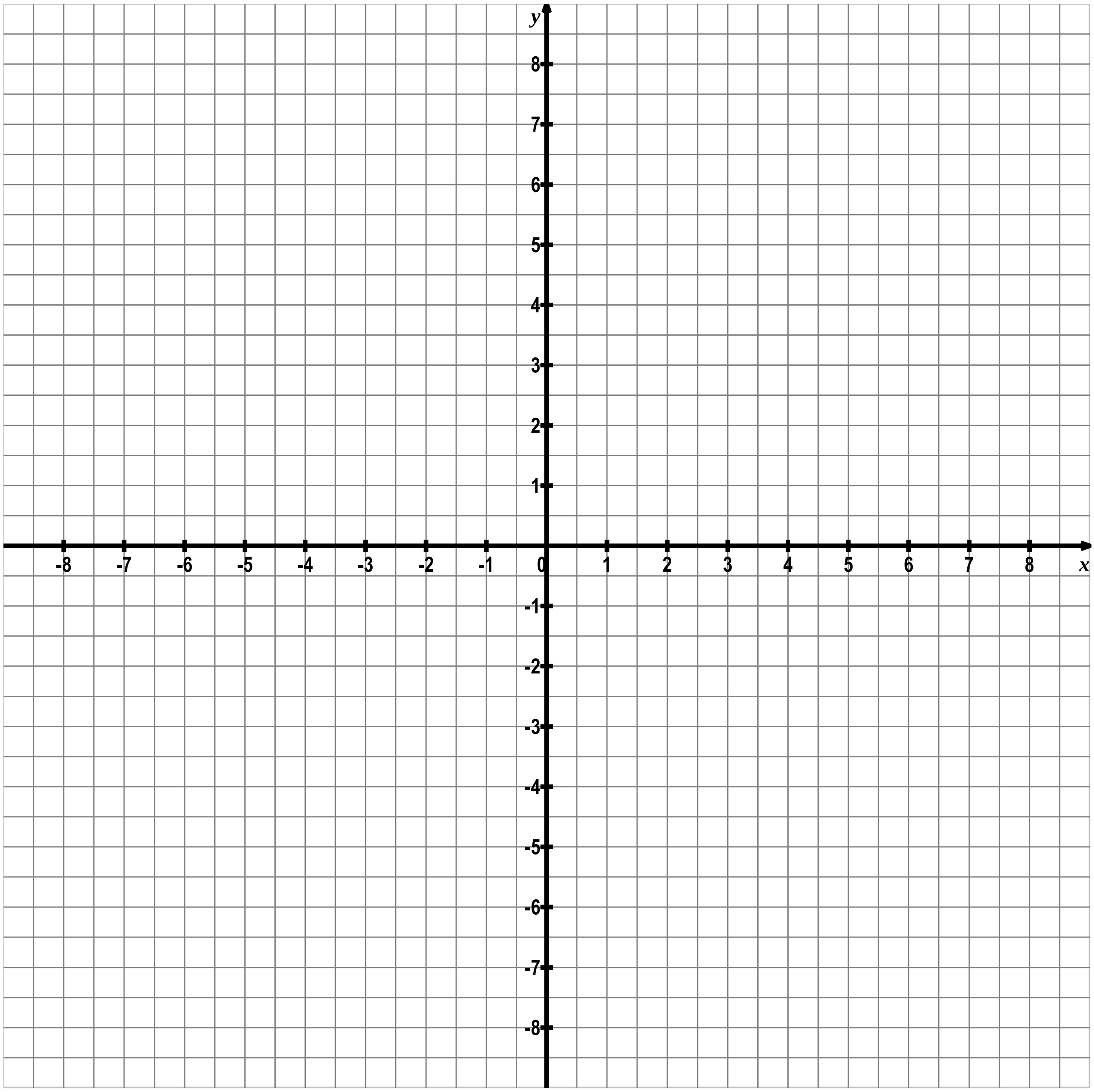
	Cout mensuel fixe	***Cout par mégabyte (MB) téléchargé***
Formule A	12,80 €	Aucun
Formule B	0,03 € / MB	0,07 € / MB

Au-delà de quel volume de téléchargement mensuel exprimé en mégabytes (MB) la formule A commencera-telle à être plus intéressante que la formule B ?

ÉCRIS ton raisonnement et tes calculs.

3. Voici une liste de fonctions du premier degré du type : y = ***m***.x + ***p***. Construis le graphique des fonctions suivantes en utilisant un minimum de renseignements et de constructions.

1] $f_1(x) = y = -3x + 2$	2] $f_2(x) = y = 2x$	3] $f_3(x) = y = -2$	4] $f_4(x) = y = 2x + 3$
5] $f_5(x) = y = \frac{2}{3}x - 3$	6] $f_6(x) = y = -3x$	7] $f_7(x) = y = -\frac{1}{2}x$	8] $f_8(x) = y = \frac{2}{3}x + 2$
9] $f_9(x) = y = 3$	10] $f_{10}(x) = y = -\frac{1}{2}x - 3$	11] $f_{11}(x) = y = 0$	12] $f_{12}(x) = y = -\frac{2}{5}x + 2$



a) Quelle influence a le paramètre « ***m*** » sur le graphique de ces droites ?

b) Quelle influence a le paramètre « ***p*** » sur le graphique de ces droites ?

c) Les fonctions n° .... ont pour graphique une droite qui ne passe pas par O.

d) Les fonctions n° .... ont pour graphique une droite qui passe par O.

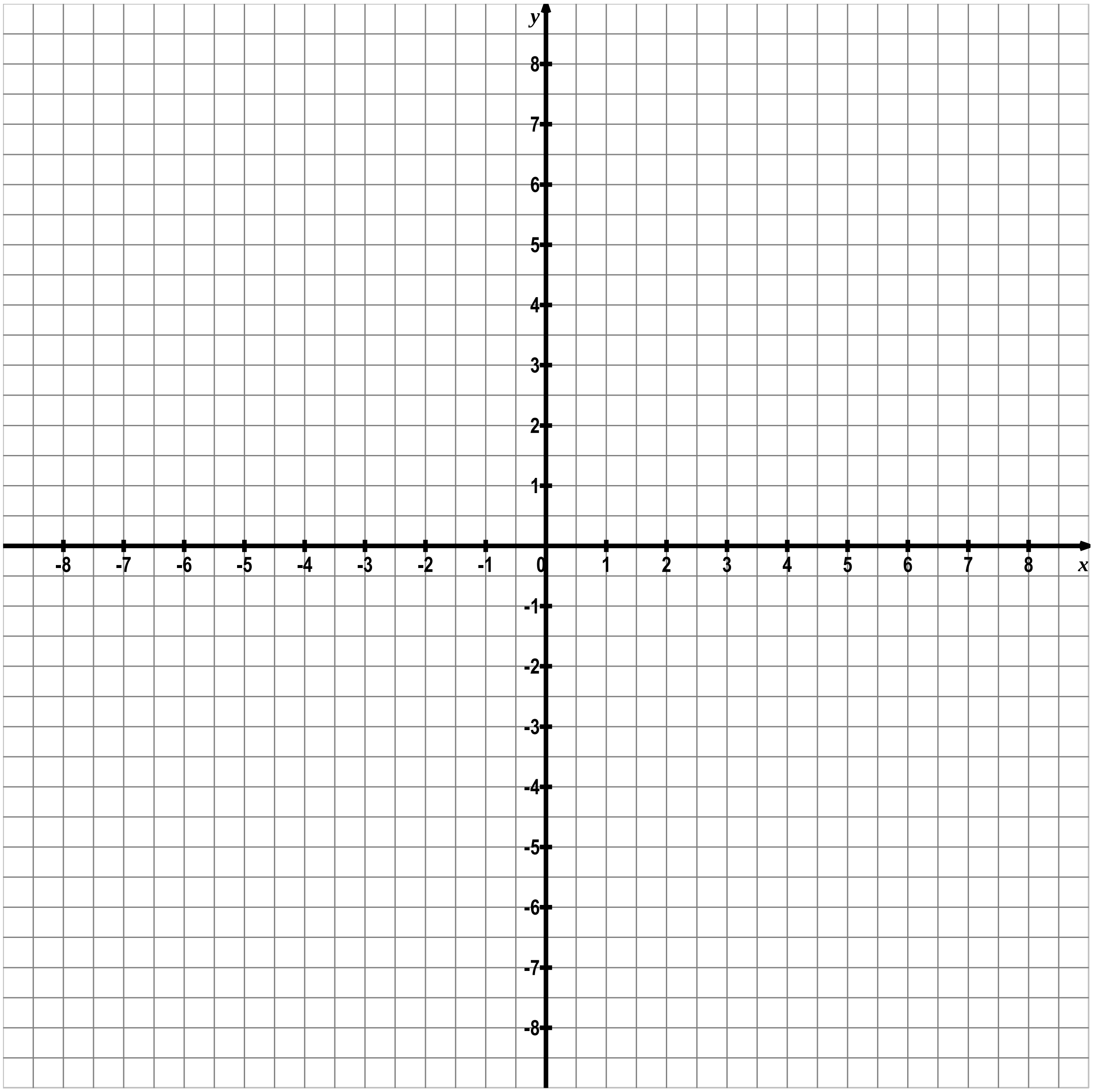
e) Les fonctions n° .... ont pour graphique une droite qui monte de gauche à droite. Dans ce cas, si on prend des valeurs croissantes pour x, on obtient des valeurs …………………… pour f(x).

f) Les fonctions n° .... ont pour graphique une droite qui descend de gauche à droite. Dans ce cas, si on prend des valeurs croissantes pour x, on obtient des valeurs ……………………..pour f(x).

g) Les fonctions n° .... ont pour graphique une droite qui est parallèle à un axe.

h) Les fonctions n° .... ont pour graphique une droite qui n'est pas parallèle à un axe.

i) Les fonctions n° .... ont pour graphique une droite qui est confondue avec un axe.



j) Résous graphiquement puis algébriquement les équations et inéquations suivantes :

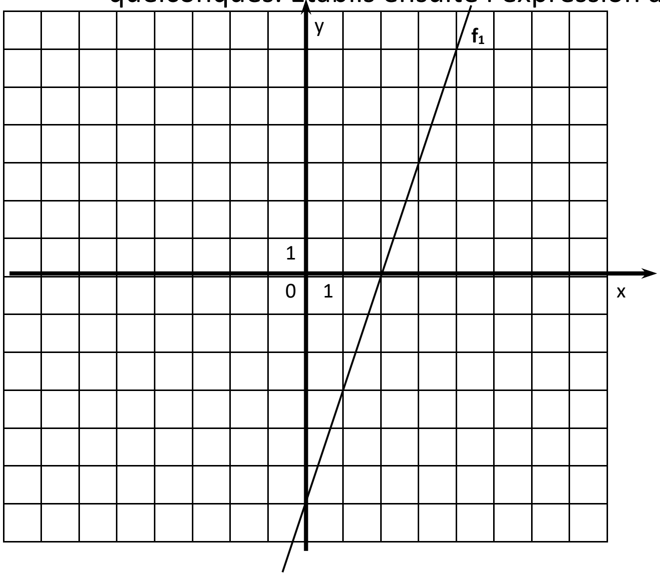
1] $f_1(x) = f_2(x)$	2] $f_{10}(x) = f_9(x)$	3] $f_3(x) > f_5(x)$	4] $f_{10}(x) \leq f_{11}(x)$
5] $f_4(x) = f_5(x)$	6] $f_{12}(x) \geq f_8(x)$	7] $f_4(x) > f_2(x)$	8] $f_6(x) < f_2(x)$

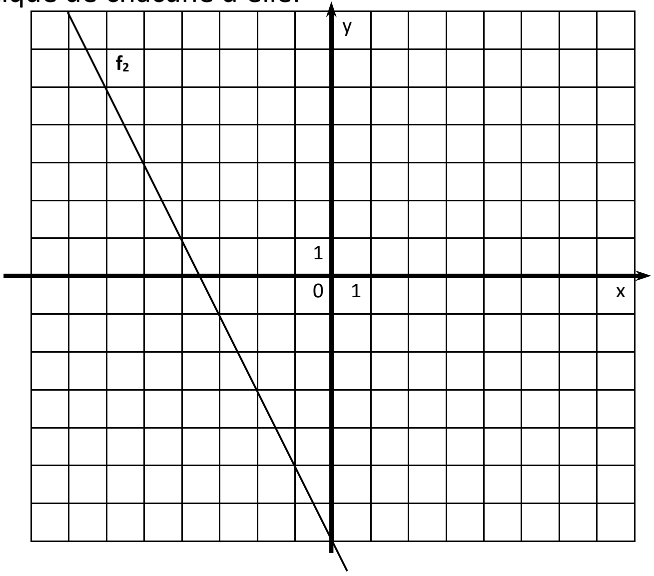
4. Complète le tableau synthèse suivant :

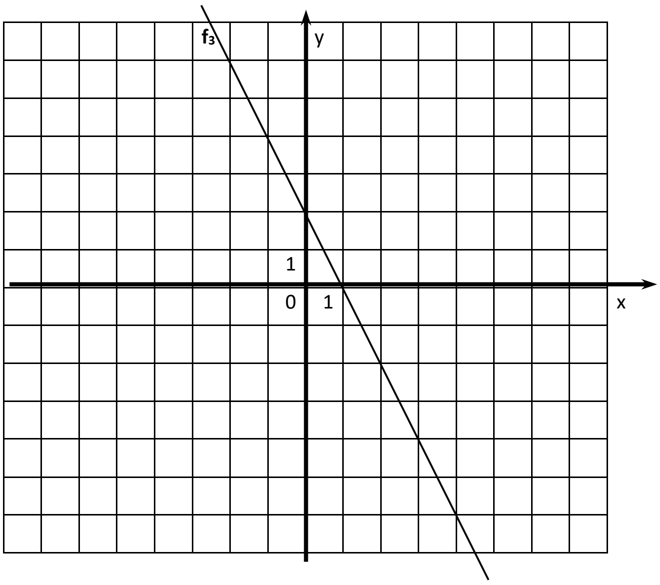
	Exemple de fonction du 1er degré **$f(x) = y = 3.x - 2$**	**Forme générale d'une fonction du 1er degré** **$f(x) = y = m.x + p$**
Taux d'accroissement		
Fonction croissante si…	**OUI - NON**	
Fonction décroissante si…	**OUI - NON**	
Fonction constante si…	**OUI - NON**	
Fonction linéaire ou affine		
Zéro de la fonction		
Ordonnée à l'origine		
Image de…	$f(2) =$ $f(-1) =$	
Antécédents de…	Si $f(x) = 2$, alors $x = \ldots$	

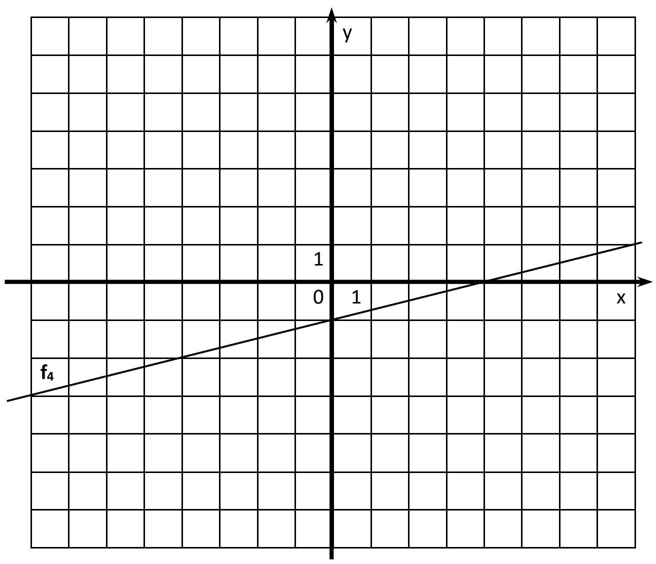
5. **Signe d'une fonction du premier degré**

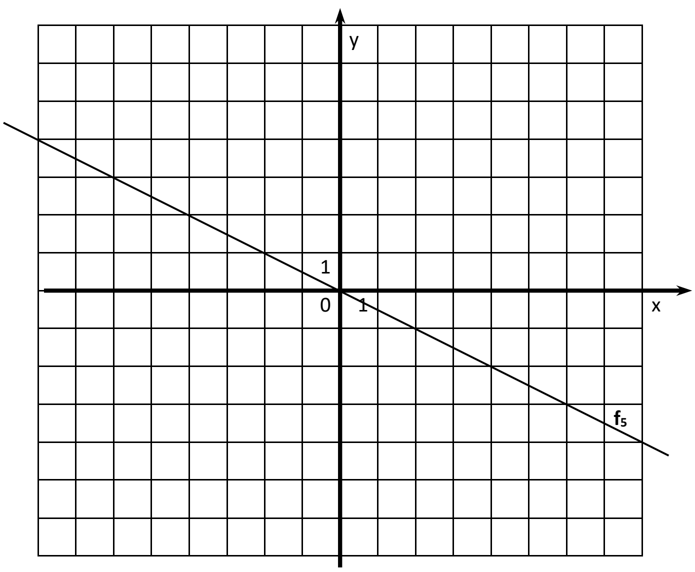
6. Calcule le taux d'accroissement des fonctions représentées ci-dessous à partir de deux points quelconques. Etablis ensuite l'expression analytique de chacune d'elle.

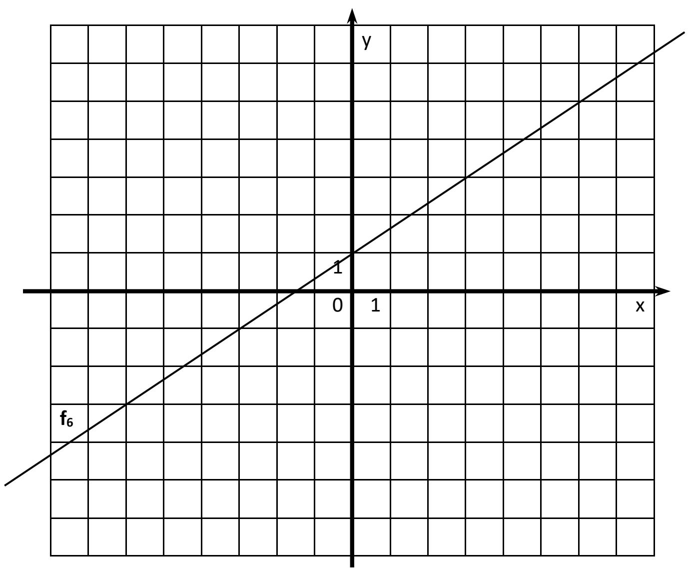












SYNTHESE : FONCTIONS DU PREMIER DEGRE

1. LES FONCTIONS DU PREMIER DEGRE

1.1. Définition

Une fonction est du premier degré lorsque son expression analytique est de la forme :

f(x) = y = mx + p (avec $m \neq 0$)

L'expression « du premier degré » est due à l'exposant « 1 » de la variable « x ».
Les coefficients ***m*** et ***p*** peuvent être remplacés par différents nombres. Chaque fois qu'ils sont fixés, la formule y = mx + p définit une fonction.

Exemple : si m = -2 et p = -1,5, la fonction est f(x) = -2x – 1,5.

1.2. Représentation graphique

Dans nos découvertes, nous avons constaté que la représentation graphique d'une fonction du premier degré est une droite (accroissements constants). Pour la représenter, il suffit de déterminer deux de ses points.

Pour ce faire, le plus simple est de donner des valeurs à x et de calculer dans chaque cas f(x) (ou y). Cependant, **il est prudent d'en rechercher trois** car, si tu fais une erreur dans un des points, ils ne seront plus alignés et tu constateras ton erreur par toi-même.

Remarque :

Tu peux aussi donner une valeur à f(x) ou y et calculer x.

Exemple : soit la fonction f(x) = y = 2.x + 4

Si y = 6 $\Rightarrow$ 2.x + 4 = 6 $\Rightarrow$ 2.x = 2 $\Rightarrow$ x = 1 $\Rightarrow$ (1 ; 6)

D'habitude, tu recherches les **coordonnées à l'origine** :

Tu recherches les points particuliers, intersections entre la droite et les axes « x » et « y ».

- **Sur l'axe des « x »**, tous les points ont une **ordonnée nulle**. Tu dois donc remplacer « y » par 0 et calculer « x » (la **zéro**). Les coordonnées de ce point sont de la forme (… ; 0).

  $\boxed{y = 0}$ $\Rightarrow 0 = 2.x + 4$

  $\Rightarrow x = -2$

  *Le point d'intersection de la fonction et de l'axe des x est **(-2 ; 0)***

- **Sur l'axe des « y »**, tous les points ont une **abscisse nulle**. Tu dois donc remplacer « x » par 0 et calculer « y » (**l'ordonnée à l'origine**). Les coordonnées de ce point sont de la forme (0 ; …).

  $\boxed{x = 0}$ $\Rightarrow y = 2.0 + 4$

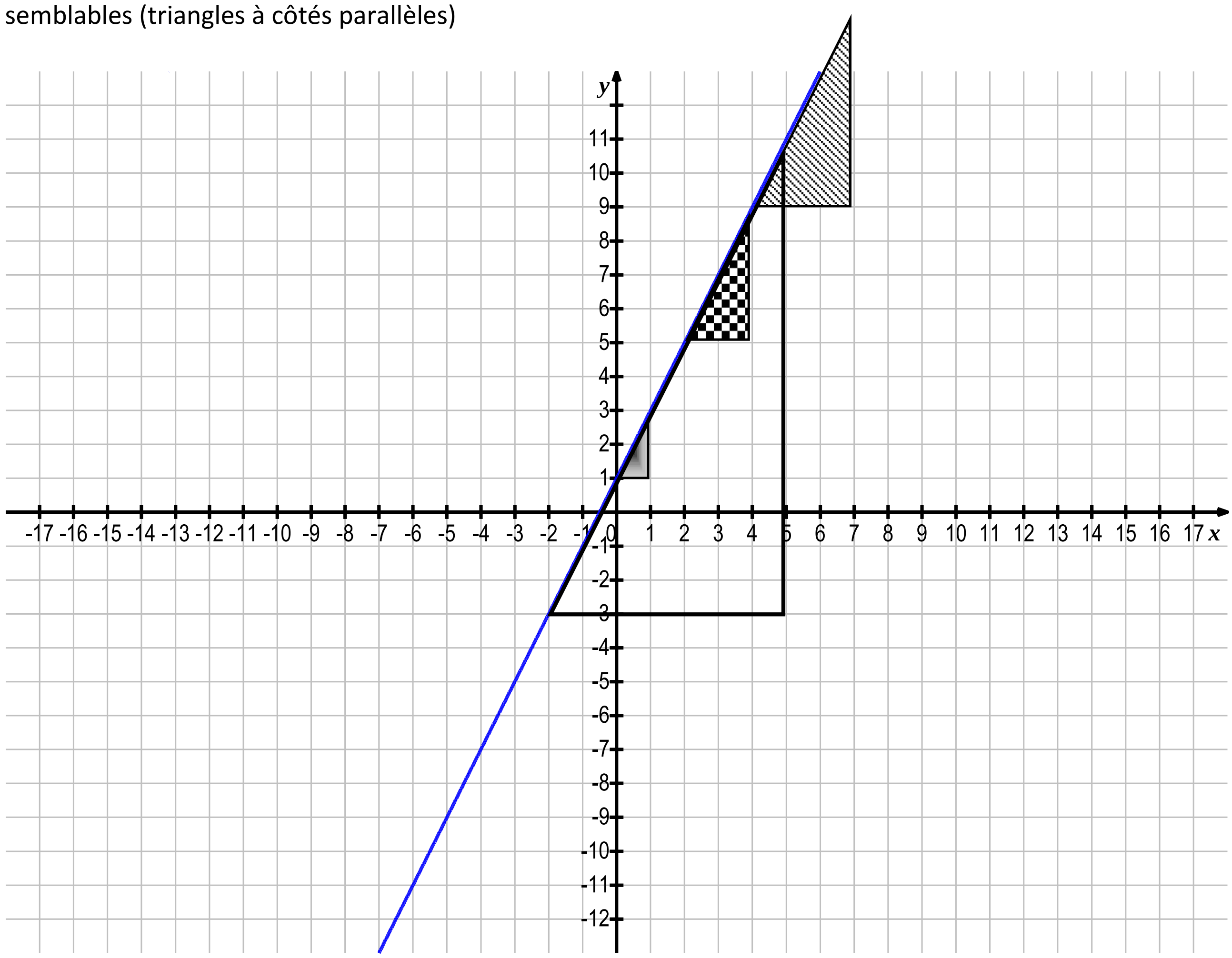
  $\Rightarrow y = 4$

  *Le point d'intersection de la fonction et de l'axe des « y » est **(0 ; 4)***

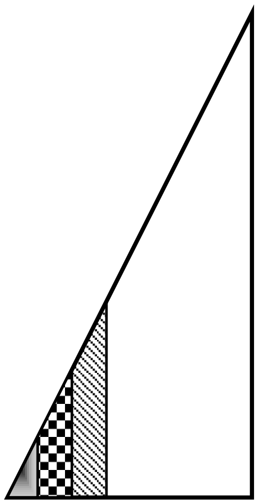
Attention ! Il est parfois plus intéressant de choisir d'autres points qui auront pour abscisse et pour ordonnée des valeurs entières. **Donc fais un choix intelligent**.

1.3. Taux d’accroissement constant et droite

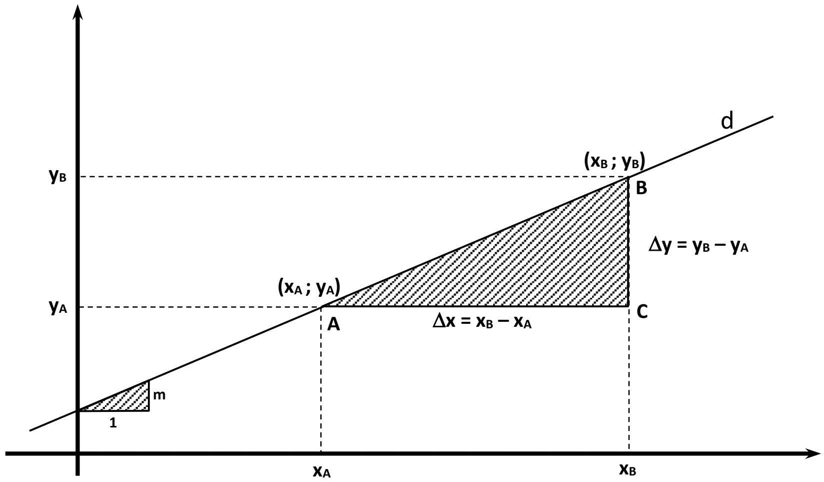
Une fonction du premier degré est donc caractérisée par un **taux d’accroissement constant** : le rapport entre les accroissements des images et les accroissements des antécédents correspondants est toujours le même, quelques soient les couples de points pris en considération pour la fonction du premier degré envisagée.
En effet, tous les triangles rectangles formés à partir de deux points du graphique de la fonction sont semblables (triangles à côtés parallèles)



	x	$f(x) = y = 2x + 1$		
$\Delta x = 1 - 0 = 1$	0 1	1 3	$\Delta y = 3 - 1 = 2$	$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{3-1}{1-0} = 2$
$\Delta x = 4 - 2 = 2$	2 4	5 9	$\Delta y = 9 - 5 = 4$	$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{3-1}{1-0} = 2$
$\Delta x = 7 - 4 = 3$	4 7	9 15	$\Delta y = 15 - 9 = 6$	$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{15-9}{7-4} = 2$
$\Delta x = 5 - (-2) = 7$	-2 5	-3 11	$\Delta y = 11 - (-3) = 14$	$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{11-(-3)}{5-(-2)} = 2$



Pour calculer ce taux, il suffit donc de prendre deux points quelconques du graphe de la fonction et de calculer le rapport entre l'accroissement des images et l'accroissement des antécédents :



Taux d'accroissement de *d* = $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{m}{1} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = m$ [1]

En résumé : $\boxed{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\text{dénivellation}}{\text{écartement}}}$

__Exemple__ : Soit A (2 ; 1) et B (5 ; 10) deux points. Quel est le taux d'accroissement de la fonction représentée par la droite AB ?

	x	y	
	2	1	
Δx = 5 - 2			Δy = 10 - 1
	5	10	

$$m_{AB} = \frac{10-1}{5-2} = 3$$

__Remarque__ :

Dans le chapitre de trigonométrie, nous avions défini :

$$\tan \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = m_d$$

Par analogie entre les deux formules, tu peux déduire que :

Tan α = taux d'accroissement de la fonction représentée par une droite AB

(où α est l'angle que AB forme avec une droite parallèle à l'axe des abscisses)

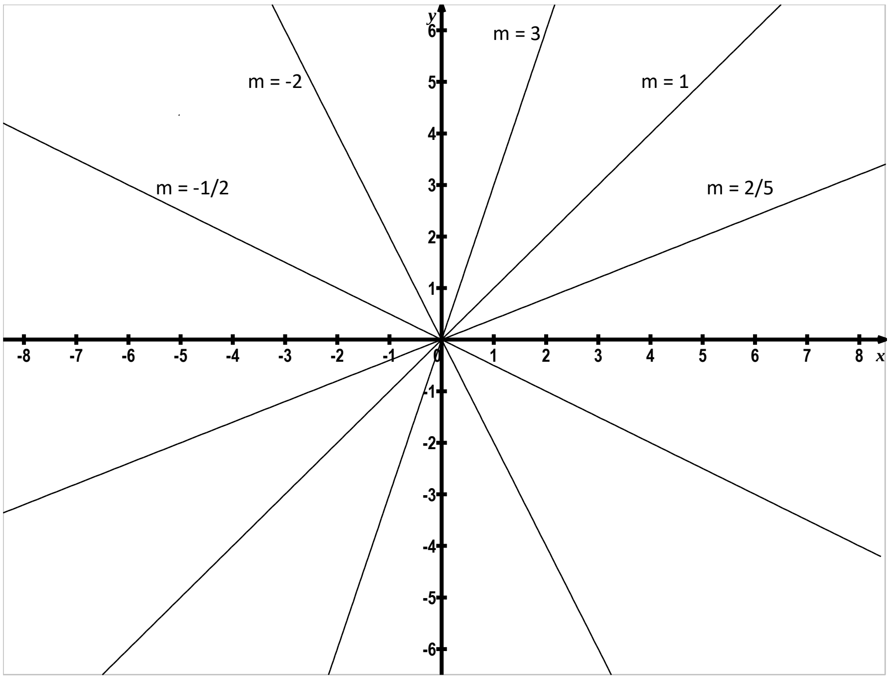
[1] Affectée d'un signe « - » quand la fonction est décroissante ; ce qui, dans la formule, sera « automatique » dans ce cas puisque y_B sera plus petit que y_A .

1.4. Allure du graphique en fonction du paramètre « *m* »

Quand tu représentes les graphiques des différentes fonctions du type

$$y = m.x$$

dans un même repère cartésien, tu obtiens un faisceau de droites passant par l'origine.



En analysant les tableaux de nombres, tu te rends compte que lorsque la variable ***x*** augmente de ***1*** la fonction f(x) (ou y) augmente de ***m*** si m est positif (diminue de ***m*** si m est négatif). Le coefficient « m » est appelé ***taux d'accroissement*** de la fonction (par abus de langage, on parle aussi de ***<u>la pente</u>*** de la droite).

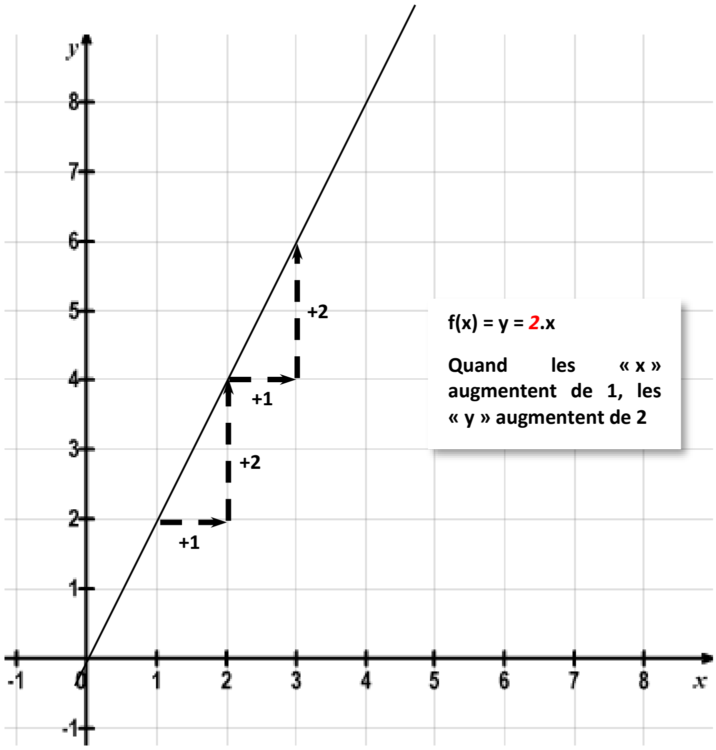
En effet :

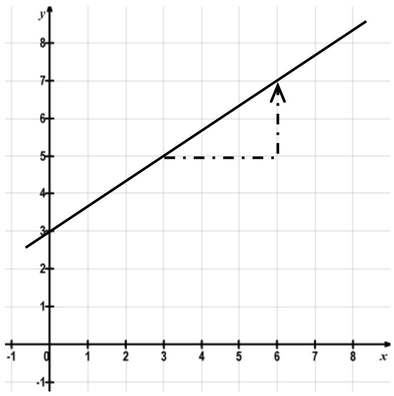
$f(x) = m.x$

$f(x + 1) = m.(x + 1) = m.x + \boldsymbol{m}$

Ce qui donne sur un graphique (*ex. avec m = 2*) :

	x	f(x) = $\boxed{m}$.x + p	Accroissement
	0	**p**	
+1	**1**	**m.1 + p**	**+m**
+1	**2**	**m.2 + p**	**+m**
+1	**3**	**m.3 + p**	**+m**
+1	**4**	**m.4 + p**	**+m**
+1	**5**	**m.5 + p**	**+m**
	...		





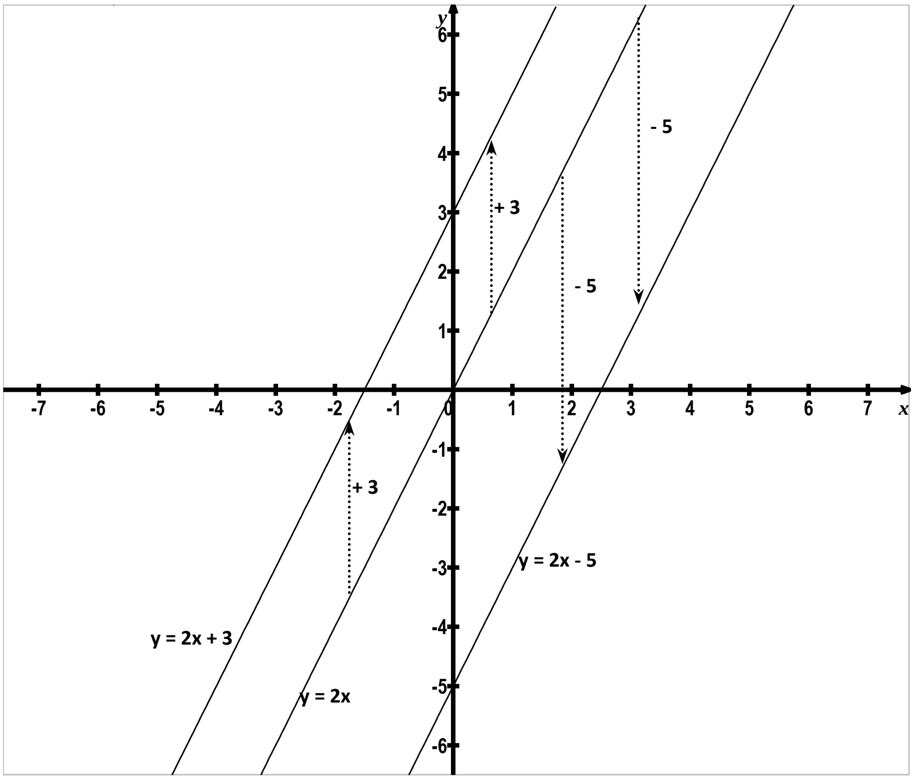
<u>Remarque</u> :

Si le taux d'accroissement est une fraction (ex. m = $\frac{2}{3}$), plutôt que « d'avancer de 1 et monter de $\frac{2}{3}$ (pas précis), il est préférable « d'avancer de 3 unités et monter de 2 unités » (triangles semblables).

Exemple ci-contre pour f(x) = $\boldsymbol{\frac{2}{3}x + 3}$

1.5. Allure du graphique en fonction du paramètre « *p* »

Quand tu représentes les graphiques des différentes fonctions du type y= m.x + ***p*** (où la valeur de m est constante) dans un même repère cartésien, tu obtiens un **faisceau de droites parallèles**. En effet, toutes ces droites ont le **même taux d'accroissement** et donc la même inclinaison par rapport à l'horizontal.



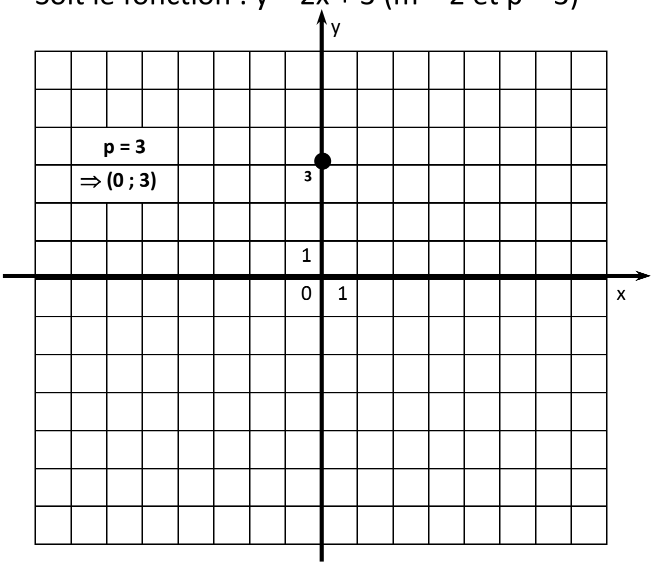
Pour passer du graphique de la fonction y = 2x à celui de la fonction y = 2x + 3, tu dois ajouter 3 à l'ordonnée de chacun des points. Ce qui se traduit géométriquement par une translation verticale de 3 unités vers le haut.

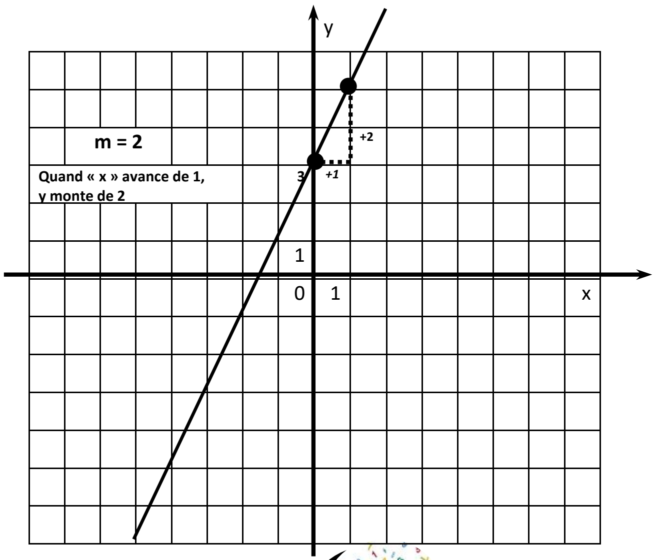
Pour passer du graphique de la fonction y = 2x à celui de la fonction y = 2x – 5, tu dois retrancher 5 à l'ordonnée de chacun des points. Ce qui se traduit géométriquement par une translation verticale de 5 unités vers le bas.

La valeur de « ***p*** » est **l'ordonnée à l'origine** de cette fonction (voir avant).

1.6. Construction du graphique à partir des valeurs de « m » et « p »

Soit le fonction : y = 2x + 3 (m = 2 et p = 3)





1.7. Domaine de définition

Le domaine de définition (Domf) d'une fonction du premier degré est toujours égal à : ***R***.

1.8. Ensemble image

L'ensemble image (Imf) d'une fonction du premier degré est toujours égal à : ***R.***

Remarque :

La fonction constante dont Imf se réduit à un nombre, n'est pas du premier degré, même si nous en parlons dans ce chapitre.

1.9. Zéro de la fonction

Une fonction du premier degré n'a évidemment qu'un seul zéro. En effet :

- Soit la fonction :

$$f(x) = y = mx + p$$

- Calculons la ou les zéro(s) de cette fonction. Pour ce faire, on égale f(x) à 0

$$\boldsymbol{f(x) = 0}$$

$$\Leftrightarrow m.x + p = 0$$

$$\Leftrightarrow m.x = -p$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{-p}{m}}$$

Le zéro d'une fonction du premier degré est égale à $\frac{-p}{m}$

1.10. Ordonnée à l'origine

Une fonction du premier degré a toujours une ordonnée à l'origine. En effet :

- Soit la fonction :

$$f(x) = y = mx + p$$

- Calculons l'ordonnée à l'origine de cette fonction. Pour ce faire, on calcule f(0)

$$\boldsymbol{f(0) = m.0 + p}$$

$$\Leftrightarrow f(0) = p$$

L'ordonnée à l'origine d'une fonction du premier degré est égale à « p »

1.11. Croissance et décroissance

Une **fonction** du premier degré est **croissante** quand le coefficient de « x » est positif (**m > 0**).

f(x) = mx + p est ↗ si m > 0

Une **fonction** du premier degré est **décroissante** quand le coefficient de « x » est négatif (**m < 0**).

f(x) = mx + p est ↘ si m < 0

Une **fonction** est dite **constante** quand le coefficient de « x » est nul (**m = 0**).

f(x) = p est → si m = 0

1.12. Fonction linéaire, fonction affine et fonction constante

Si p = 0, la fonction du premier degré devient : f(x) = mx. Elle est appelée ***fonction linéaire***.
Sa représentation graphique est une ***droite passant par l'origine des axes*** : le point (0 ; 0). Elle traduit toujours une **relation de proportionnalité** entre les deux grandeurs « x » et « f(x) ».

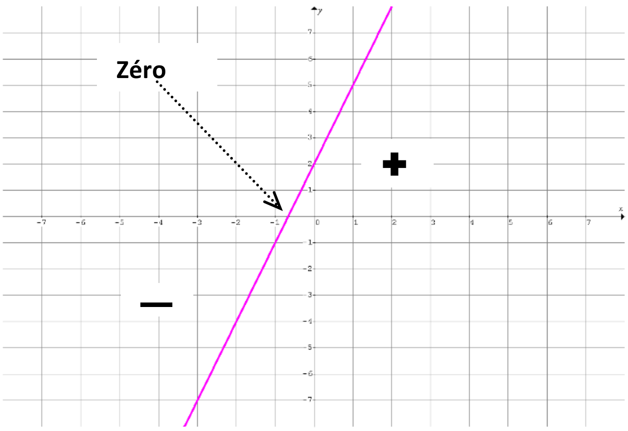
Si $p \neq 0$, la fonction du premier degré est appelée ***fonction affine***.
Sa représentation graphique est ***une droite ne passant pas par l'origine des axes*** : le point (0 ; 0) mais par le point (0 ; p).

Si m = 0, la fonction f(x) = p (qui n'est plus du premier degré) est appelée ***fonction constante*** puisque quelque soit la valeur de l'antécédent, son image est toujours la même : p

1.13. Signe d'une fonction du 1er degré

Le signe d'une fonction du premier degré dépend du signe de la pente « m » :

$\boxed{1^{er} \text{ Cas : } m > 0}$

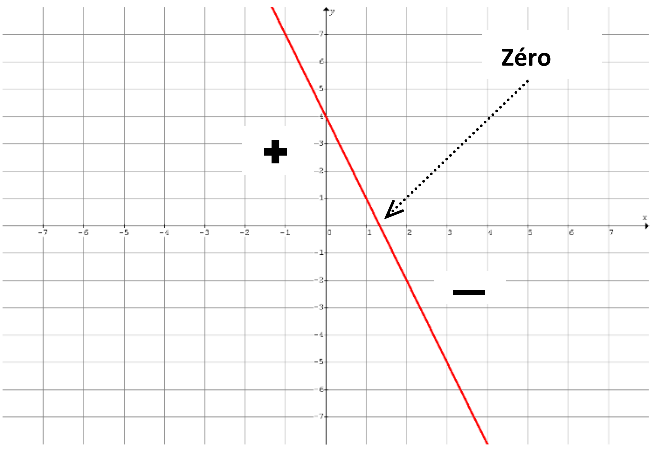


Si m est positif, la fonction f(x) = y = mx + p est croissante. Elle changera de signe à la zéro c'est-à-dire quand x = $\frac{-p}{m}$

Tableau de signe :

x		$\frac{-p}{m}$	
f(x) = y = mx + p	**—**	**0**	**+**

$\boxed{2^{ème} \text{ Cas : } m < 0}$



Si m est négatif, la fonction f(x) = y = mx + p est décroissante. Elle changera de signe à la zéro c'est-à-dire quand x = $\frac{-p}{m}$

Tableau de signe :

x		$\frac{-p}{m}$	
f(x) = y = mx + p	**+**	**0**	**—**

2. POINTS COMMUNS A DEUX FONCTIONS – POSITIONS RELATIVES

A partir des exemples d'exercices sur les tarifs, salaires,… tu as été amené à comparer deux fonctions, à déterminer pour quelle(s) valeur(s) de « x » elles sont égales, supérieures ou inférieures l'une à l'autre.

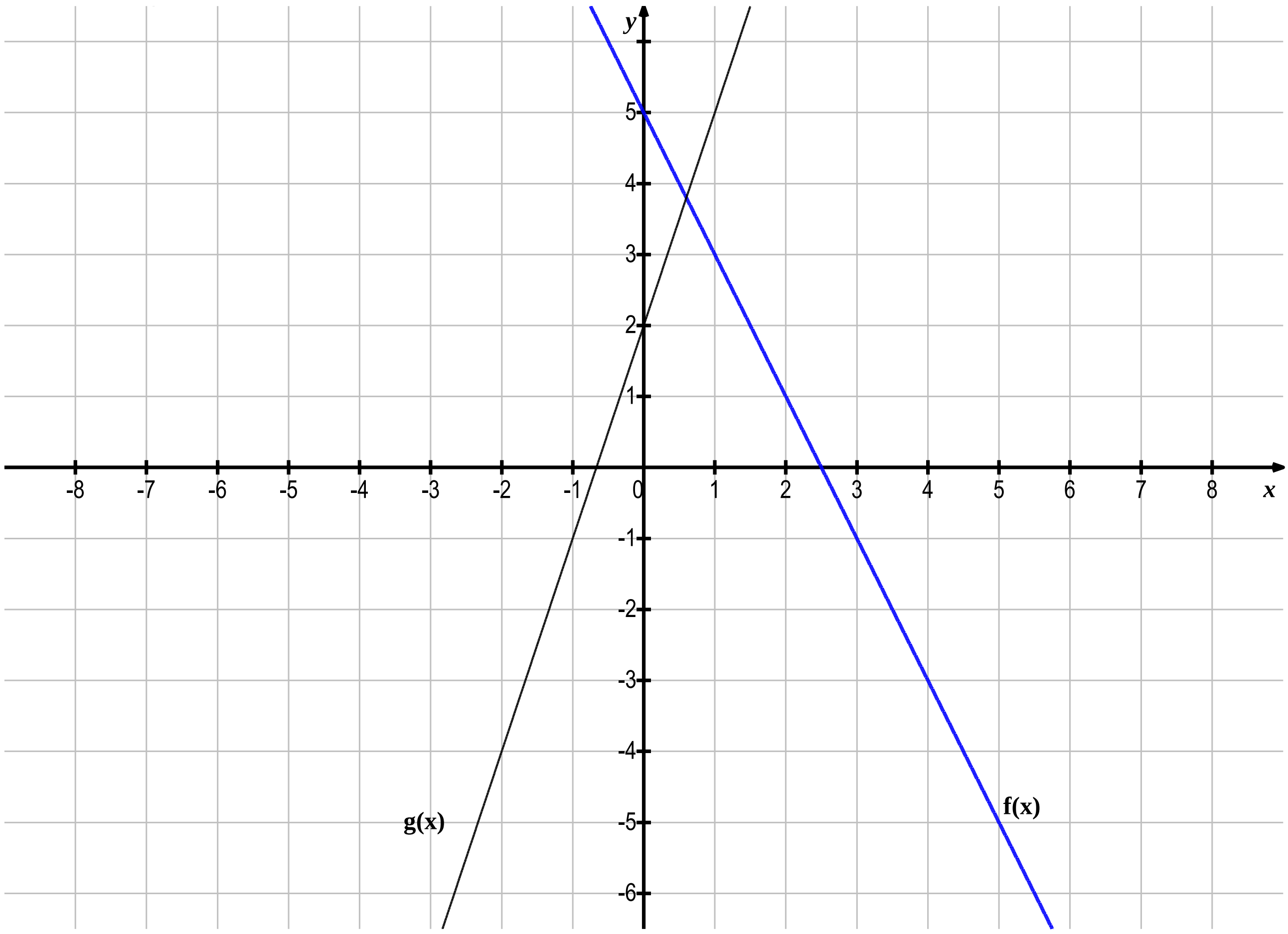
2.1. Intersection de deux droites représentants des fonctions du premier degré (f(x) = g(x))

Graphiquement :

Il suffit de déterminer les coordonnées du point d'intersection des deux droites représentant les deux fonctions. Cette méthode a ses limites au niveau de la précision, surtout si les coordonnées de ce point ne sont pas entières…

Soit les fonctions représentées dans le repère ci-dessous :

f(x) = y = -2x + 5 g(x) = y = 3x + 2



Chercher les coordonnées du point commun aux représentations graphiques de ces deux fonctions, c'est résoudre le système de deux équations à deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} f(x) = y = -2x + 5 \\ g(x) = y = 3x + 2 \end{cases}$$

L'accolade signifiant que c'est le même antécédent (x) et la même image (y) qui doit vérifier les deux équations des fonctions

Ici, par lecture graphique, la solution semble être : (0,6 ; 3,8)

Etant donné le manque évident de précision de la réponse, une résolution algébrique semble plus intéressante et surtout plus précise et sûre.

Algébriquement :

Comme le point commun aux deux fonctions doit avoir la même image (« y »), résoudre un tel système revient donc à :

- résoudre l'équation   f(x) = g(x)   qui ne contient plus que l'inconnue « x »
- remplacer ensuite la valeur de « x » trouvée dans une des deux fonctions pour trouver « y »

En pratique :

$$\begin{cases} f(x) = y = -2x + 5 \\ g(x) = y = 3x + 2 \end{cases}$$

- f(x) = g(x), donc par transitivité de l'égalité

$\Leftrightarrow$ -2x + 5 = 3x + 2

$\Leftrightarrow$ -2x – 3x = 2 – 5

$\Leftrightarrow$ -5x = -3

$\Leftrightarrow$ x = $\frac{3}{5}$

- En remplaçant la valeur de x dans la 1ère fonction : $f(\frac{3}{5}) = -2.\ \frac{3}{5} + 5 = \frac{19}{5}$

Les coordonnées du point d'intersection sont donc : $(\frac{3}{5}\ ;\ \frac{19}{5})$

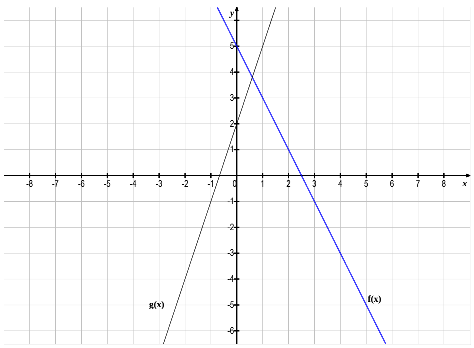
Cette méthode de résolution d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues est appelée **méthode par comparaison**

<u>2.2.</u> <u>Résolutions de f(x) > g(x) ; f(x) < g(x) ; f(x) ≤ g(x) ou f(x) ≥ g(x)</u>

Pour déterminer quand un tarif est plus intéressant qu'un autre, tu es amené à résoudre des inéquations du style :

f(x) > g(x)   (ou   f(x) ≥ g(x) ou…)

Graphiquement :



La fonction f(x) est « plus grande » que la fonction g(x) quand la droite qui représente f(x) est « au-dessus » de la droite qui représente g(x).

Après avoir déterminé les coordonnées du point d'intersection entre f(x) et g(x), la solution est l'intervalle :

f(x) > g(x)   si $x \in\ ]-\infty\ ; 0{,}6[$

Algébriquement :

Il suffit de résoudre l'inéquation directement déduite de l'inégalité demandée :

f(x) > g(x) $\Leftrightarrow$ -2x + 5 > 3x + 2

$\Leftrightarrow$ -2x – 3x > 2 – 5

$\Leftrightarrow$ -5x > -3

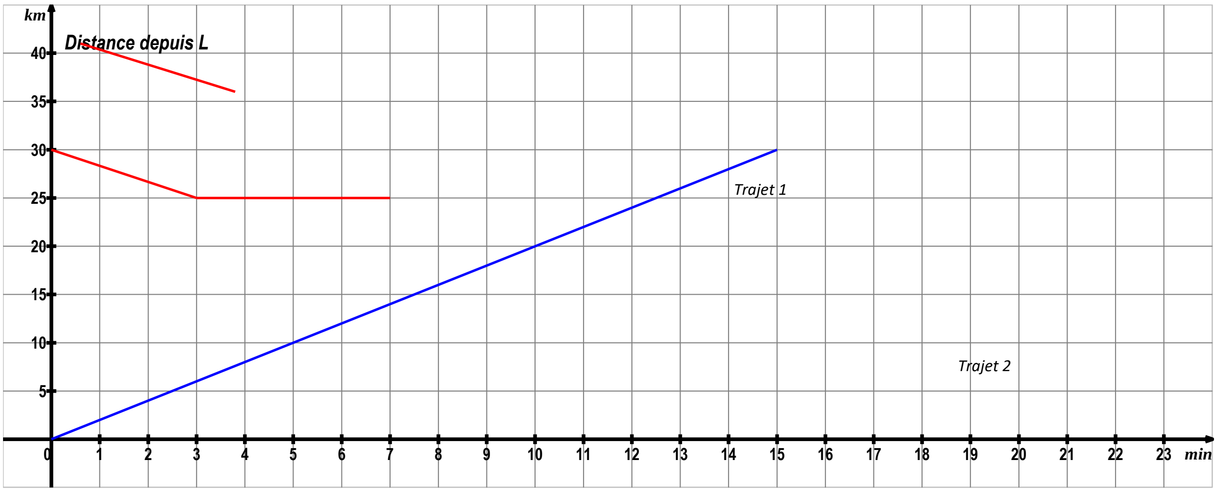
$\Leftrightarrow$ x < $\frac{3}{5}$ (on a divisé les 2 membres de l'inéquation par un nombre négatif) donc si $x \in\ ]-\infty\ ;\ \frac{3}{5}\ [$

EXERCICES : FONCTIONS DU PREMIER DEGRÉ

CONNAÎTRE

1. *En voiture…*

Une voiture V_1 circule de L vers B, une autre V_2 de B vers L.



1] Lequel des deux graphiques (trajet 1 ou 2) représente l'évolution de la distance parcourue en fonction du temps pour la voiture V_2 ?

2] Les deux voitures partent-elles en même temps ?

3] A quel moment les deux voitures se rencontrent-elles ?

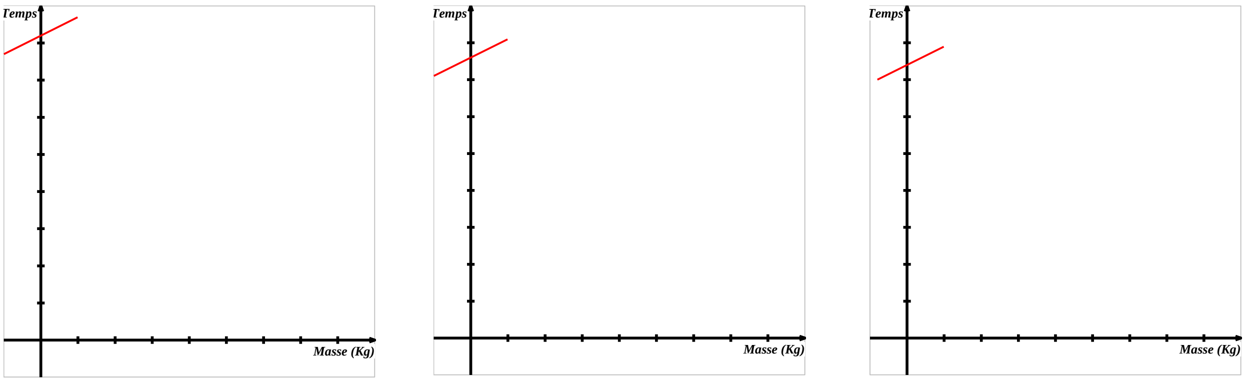
4] A quelle distance de L se rencontrent-elles ?

2. *Bien cuit*

Un livre de recettes donne les instructions suivantes pour la cuisson d'un rôti : 20 minutes par kilo de viande, plus 30 minutes.

1] Quel est le graphique dont l'allure correspond à la relation entre le poids et le temps de cuisson ?

2] Le temps de cuisson est-il proportionnel au poids ?

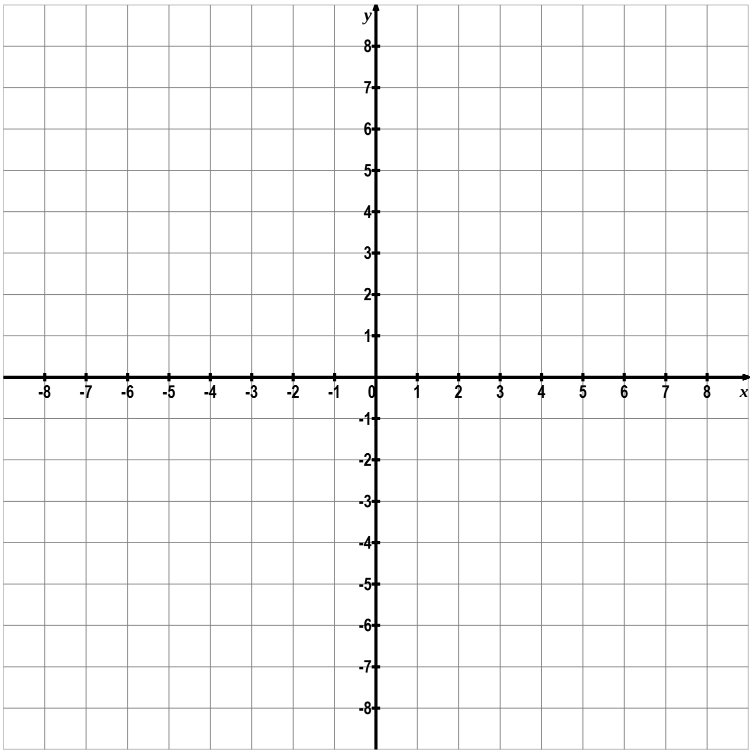


3. *Accroissement*

1] Le tableau ci-contre correspond à une fonction du premier degré. Complète-le.

x	y	△y
-2		
		-2
-1		
		-2
0	1	
		-2
1		
		-2
2		
		-2
	-5	

2] Construis le graphique correspondant dans le repère ci-dessous.



3] Etablis la formule qui traduis la relation entre x et y (y en fonction de x)

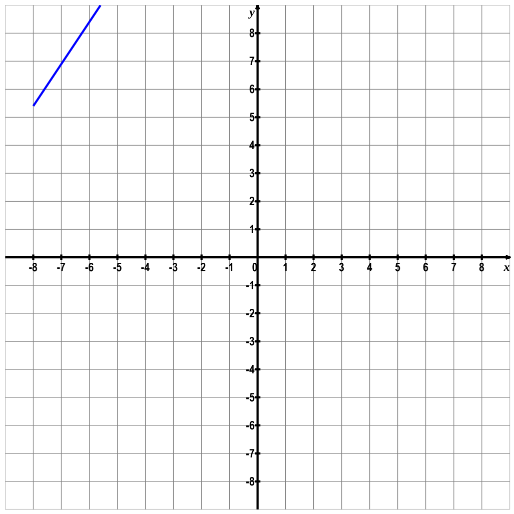
4] Etablis la formule réciproque (*x en fonction de y*)

4. *Tableaux, graphiques et formules*

Complète les données manquantes pour chacune des fonctions ci-dessous :

Tableau	***Graphique***	***Formule : f(x) = y = mx + p***

x	*y*
0	
	0
4	
	-1,5
-2	
3	



Taux d'accroissement

m =

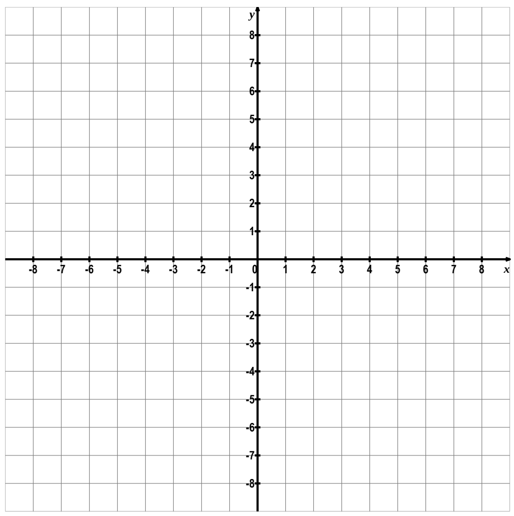
Ordonnée à l'origine

p =

Equation de la fonction

Tableau	***Graphique***	***Formule : f(x) = y = mx + p***

x	*y*
0	
	0
1	
2	
	-2
-3	



Taux d'accroissement

m = 2

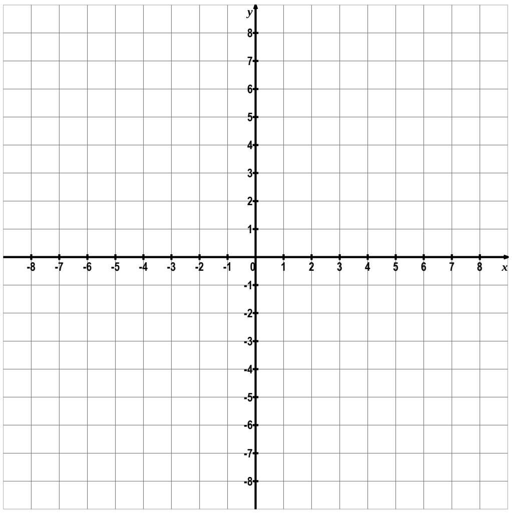
Ordonnée à l'origine

p = 0

Equation de la fonction

Tableau	Graphique	Formule : f(x) = y = mx + p

x	y
0	2
2	0



Taux d'accroissement

m =

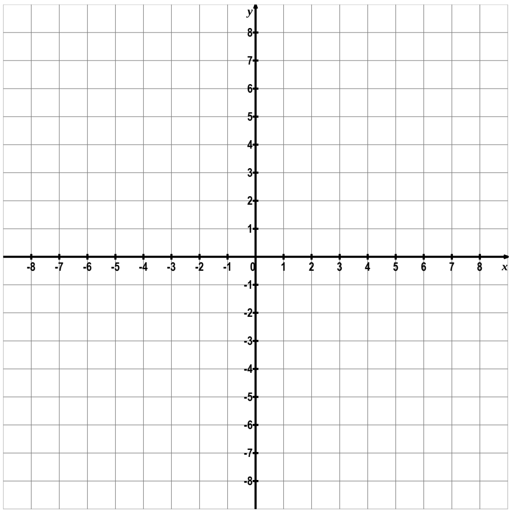
Ordonnée à l'origine

p =

Equation de la fonction

Tableau	Graphique	Formule : f(x) = y = mx + p

x	y
1	3
4	7



Taux d'accroissement

m =

Ordonnée à l'origine

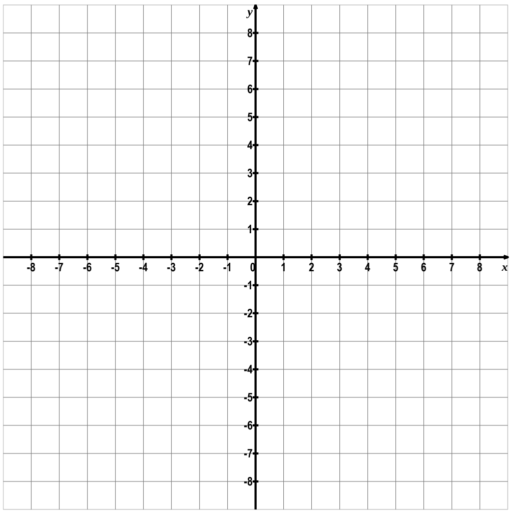
p =

Equation de la fonction

Invente…

Tableau	Graphique	Formule : f(x) = y = mx + p

x	y



Taux d'accroissement

m =

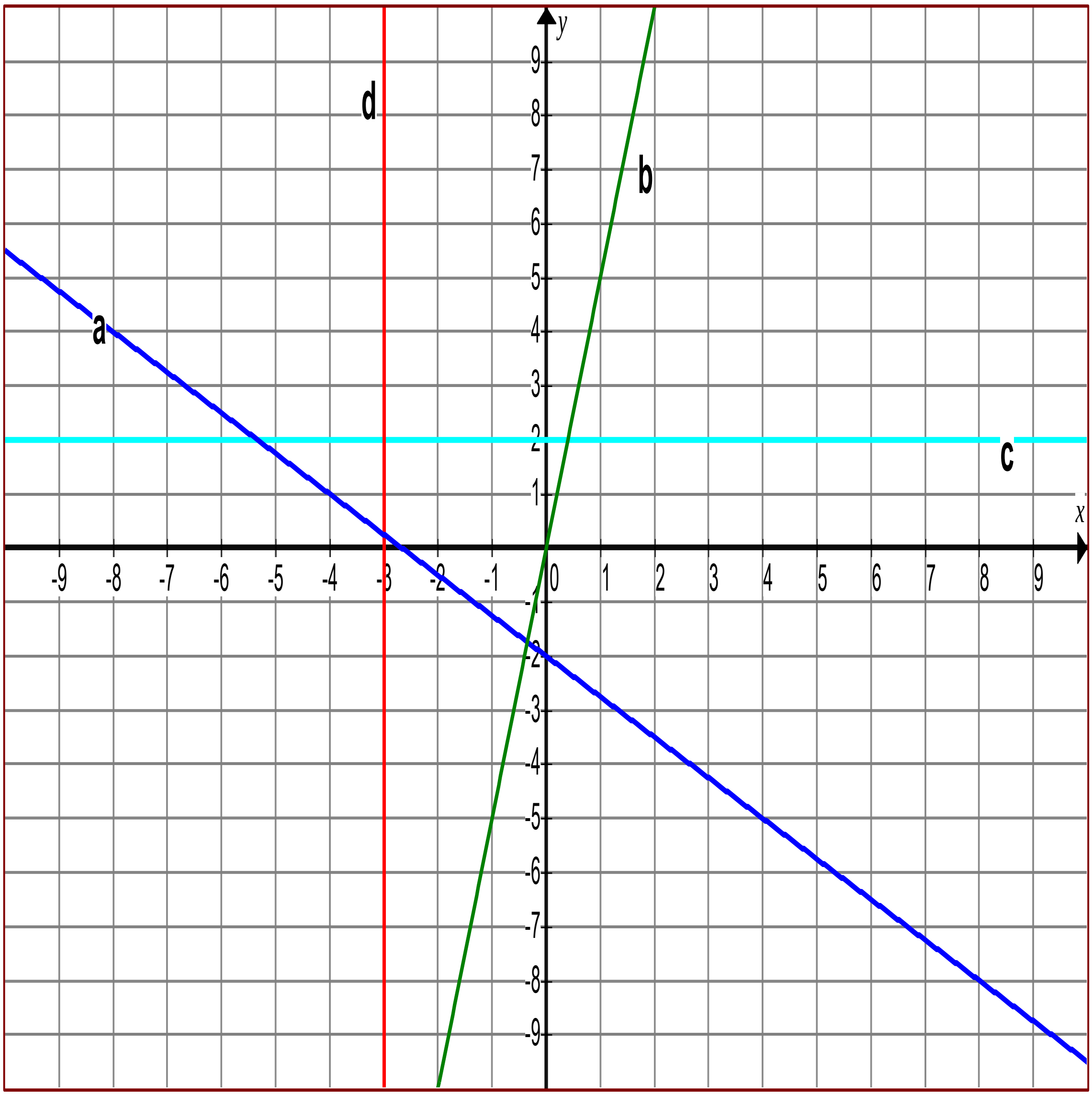
Ordonnée à l'origine

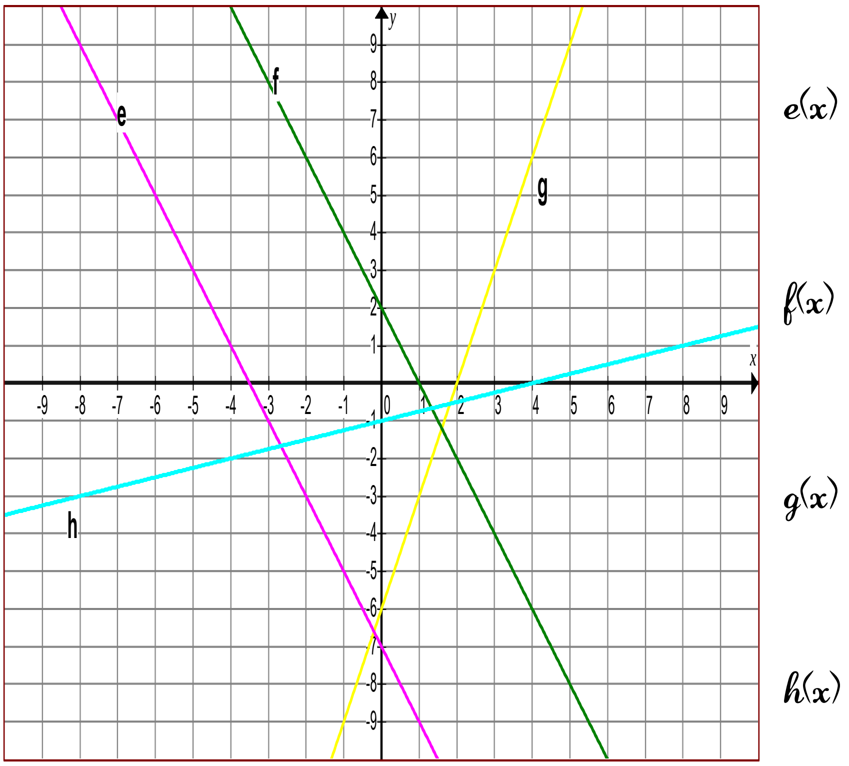
p =

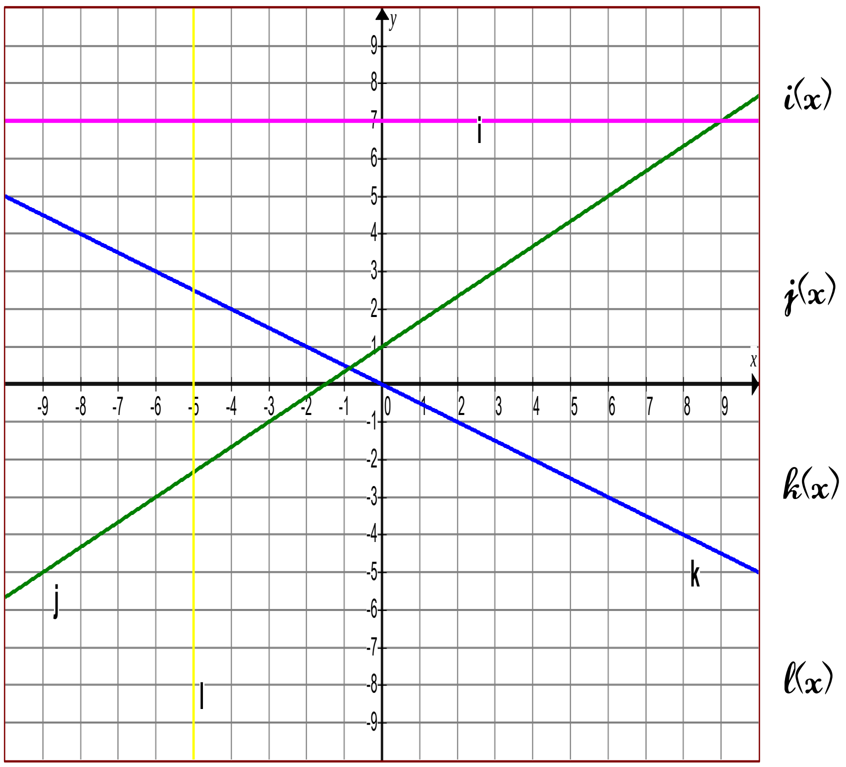
Equation de la fonction

5. *A chacun sa fonction*

<u>Quand cela est possible</u>, calcule le taux d'accroissement de chacune des fonctions représentées ci-dessous. Etablis ensuite l'expression analytique de chacune d'elle.







a) Quelles sont les droites qui ne représentent des fonctions du premier degré ? Pourquoi ?

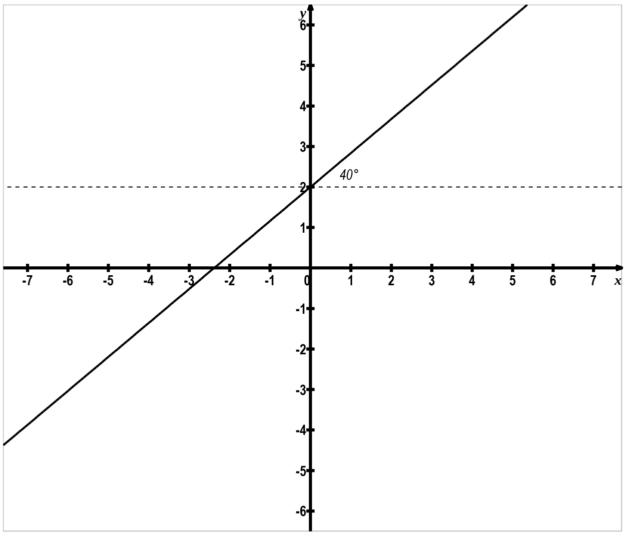
b) <u>Conditions de parallélisme et de perpendicularité de deux droites</u>

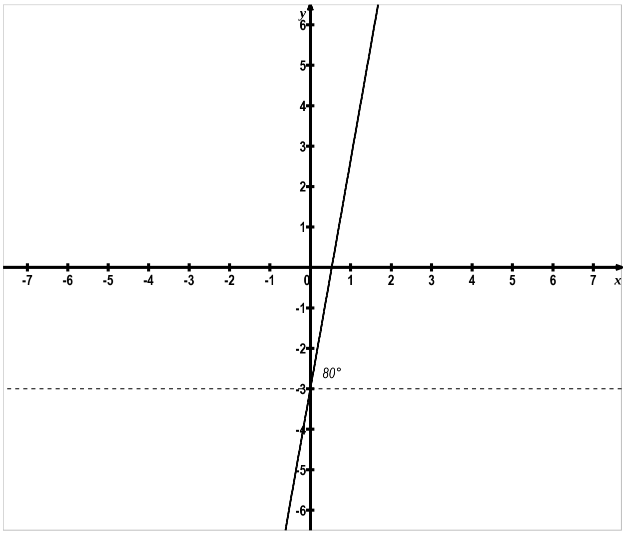
a // b ⇔

a ⊥ b ⇔

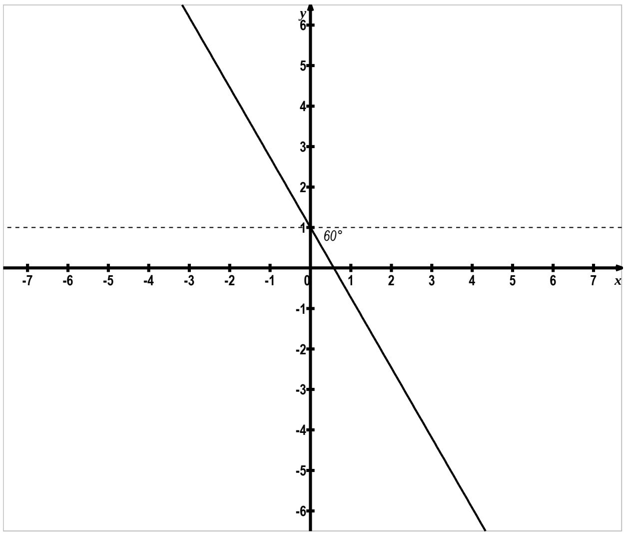
6. *Taux d'accroissement et angles*

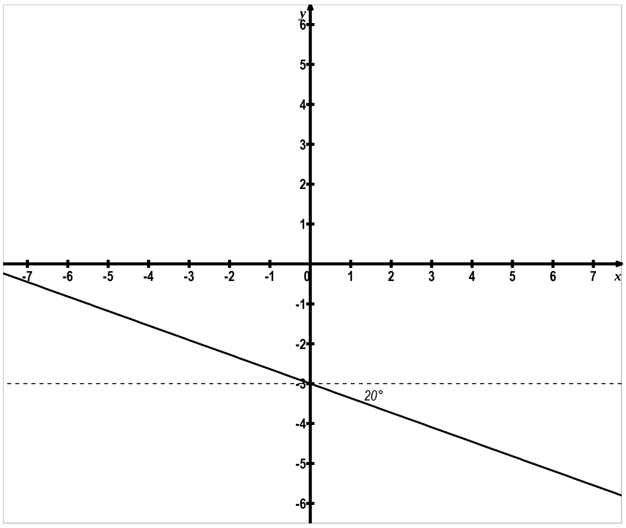
A l'aide des informations fournies par le dessin (angle que forme chaque droite avec l'horizontale),

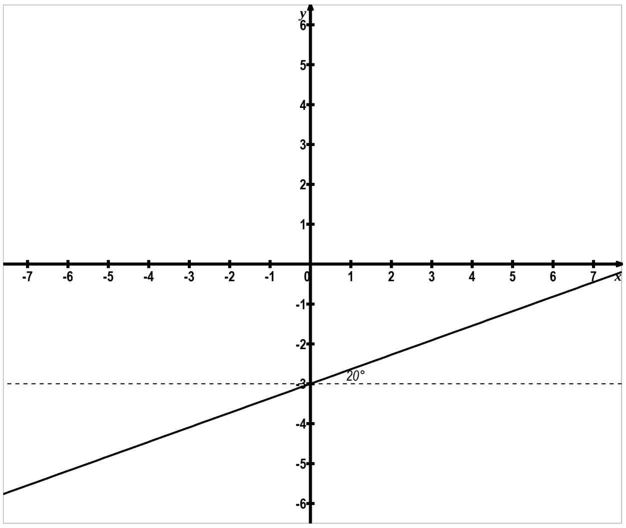


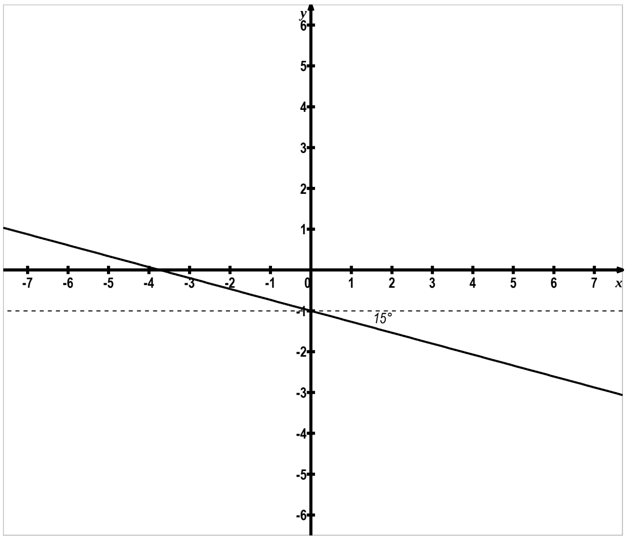


détermine l'équation cartésienne des fonctions suivantes









7. ***Calcule*** le taux d'accroissement des fonctions dont voici deux des points :

Δx=

x	y
3	2
5	6

Δy=

Δx=

x	y
1	0
3	5

Δy=

Δx=

x	y
-3	1
2	-2

Δy=

Δx=

x	y
3	-2
-5	6

Δy=

Δx=

x	y
1	0
-3	-5

Δy=

Δx=

x	y
-3	-1
2	5

Δy=

Δx=

x	y
x_A	y_A
x_B	y_B

Δy=

=> taux d'accroissement de la fonction comprenant les points A et B

m_{AB} =

d_1 qui passe par A (2 ; 1) et B (4 ; 5)	d_5 qui passe par I (0 ; -3) et J (3 ; 1)
d_2 qui passe par C (1 ; 0) et D (4 ; 3)	d_6 qui passe par K (-4 ; -2) et L (-1 ; 3)
d_3 qui passe par E (-2 ; 1) et F (2 ; -1)	d_7 qui passe par M (0 ; 0) et N (-1 ; -3)
d_4 qui passe par G (3 ; -2) et H (-1 ; -2)	d_8 qui passe par P (-2 ; 3) et Q (-2 ; 9)

Comment déterminer leur équation ?

8. ***Détermine*** l'expression analytique des fonctions du premier degré répondants aux conditions suivantes :

a) f_1 passe par le point (0 ; 0) et son taux d'accroissement est 2.
b) f_2 passe par le point (2 ; 1) et son taux d'accroissement est -3.
c) f_3 passe par le point (-1 ; 3) et son taux d'accroissement est -1.
d) f_4 passe par les points (2 ; 1) et (4 ; 5).
e) f_5 passe par les points (-2 ; 6) et (-5 ; -3).
f) f_6 passe par les points (-1 ; -3) et (1 ; -2).
g) f_7 passe par les points (3 ; 1) et (3 ; 5).
h) f_8 passe par les points (2 ; 1) et (-1 ; 1).
i) f_9 passe par les points (0 ; 2) et (5 ; 0).
j) f_{10} passe par le point (0 ; 0) et sa représentation graphique est parallèle à celle de la fonction y = -2x + 1
k) f_{11} passe par le point (-2 ; 1) et sa représentation graphique est parallèle à celle de la fonction y = 3x + 1
l) f_{13} passe par le point (5 ; 3) et sa représentation graphique est parallèle à celle de la fonction y = -3
m) f_{14} passe par le point (0 ; 0) et sa représentation graphique est perpendiculaire à celle de la fonction y = -2x + 1
n) f_{16} passe par le point (2 ; -3) et sa représentation graphique est perpendiculaire à celle de la fonction y = -x + 1
o) f_{17} passe par le point (5 ; 3) et sa représentation graphique est perpendiculaire à celle de la fonction y = -3
p) f_{18} passe par le point (2 ; -3) et forme un angle de 57° avec l'horizontale
q) f_{19} passe par le point (5 ; 3) et forme un angle de -35° avec l'horizontale

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES
MATH POUR RÉUSSIR : PAGES 92 À 100

9. Approximation d'un nuage de points - Equation de la droite de *Mayer*

Voici les relevés de l'intensité du travail fourni (x_i) exprimée en kilojoules et de la fréquence cardiaque (y_i) exprimée en nombre de battements par minute d'une personne pendant un test à l'effort sont donnés par le tableau ci-après.

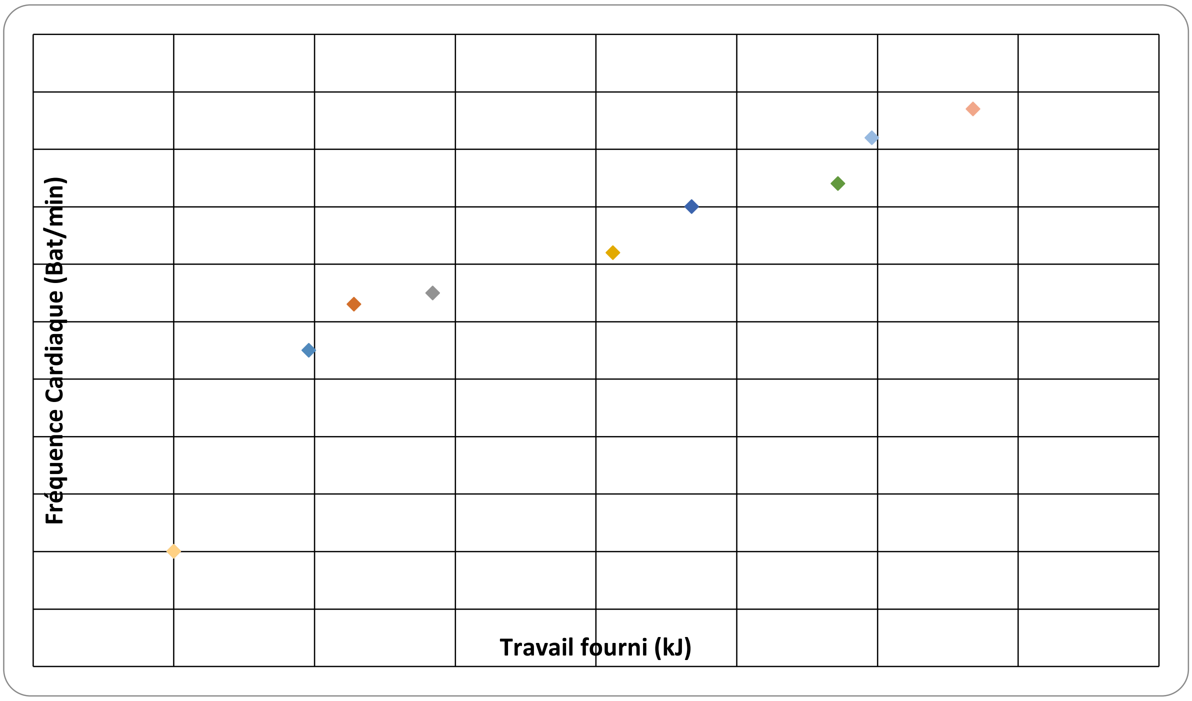
En utilisant la méthode de Mayer, tu peux :

1] *Déterminer, par son équation, la droite de régression de y par rapport à x (on arrondira les résultats au centième le plus proche).*

2] *Lorsque l'intensité du travail fourni est de 65 kJ, estimer la fréquence cardiaque.*

3] *Lorsque la fréquence cardiaque est de 100 battements par minute, estimer l'intensité du travail fourni.*

Travail fourni (x_i)	*9,6*	*12,8*	*18,4*	*31,2*	*36,8*	*47,2*	*49,6*	*56,8*
Fréquence cardiaque (y_i)	*70*	*86*	*90*	*104*	*120*	*128*	*144*	*154*



Le graphique ci-dessus montre le nuage de points dont les abscisses et les ordonnées sont respectivement le travail fourni et la fréquence cardiaque d'une personne pendant un test à l'effort.

Méthode de Mayer :

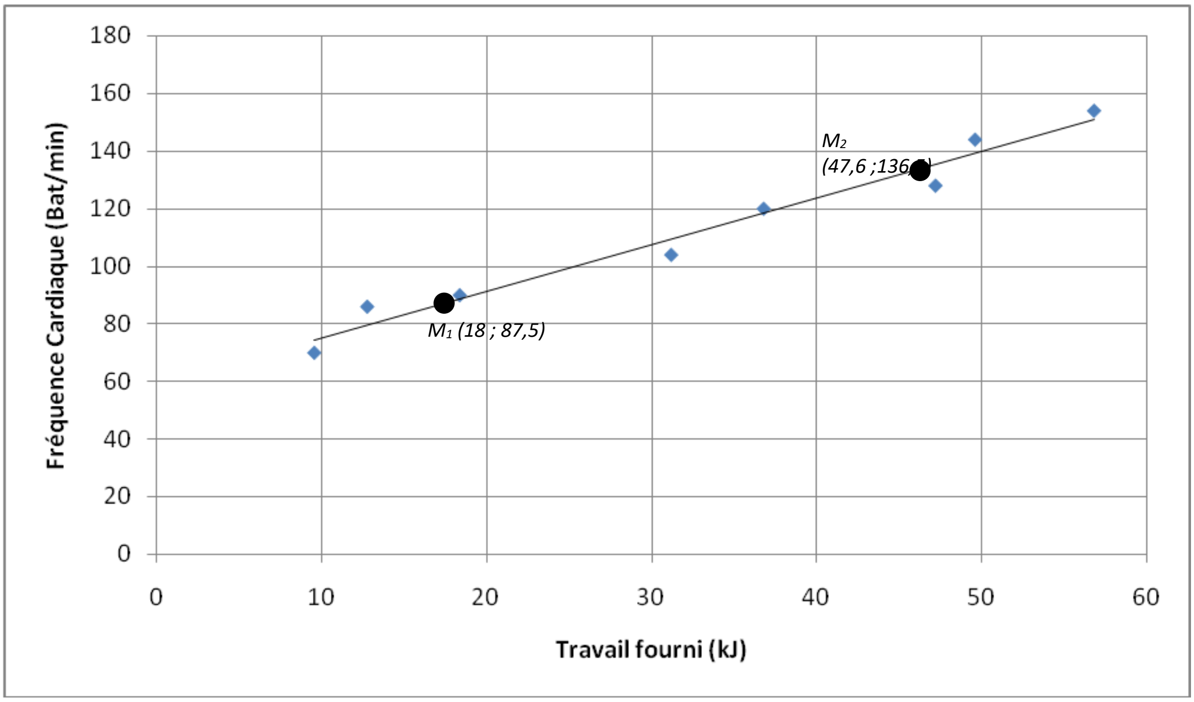
Pour établir l'équation de la droite de Mayer qui correspond à un ensemble de couples :

- On ordonne les couples par ordre croissant de leurs abscisses ;
- On divise le nuage de points en deux parties égales et on cherche les points moyens de chacun des deux nouveaux nuages : $M_1(18 ; 87,5)$ et $M_2(47,6 ;136,5)$.

Travail fourni (x_i)	*9,6*	*12,8*	*18,4*	*31,2*	*36,8*	*47,2*	*49,6*	*56,8*
Fréquence cardiaque (y_i)	*70*	*86*	*90*	*104*	*120*	*128*	*144*	*154*
	Moyenne des x_i =(9,6 + 12,8 + 18,4 + 31,2) : 4 = 18 *Moyenne des y_i = (70 + 86 + 90 + 104) : 4 =87,5*				*Moyenne des x_i =(36,8 + 47,2 + 49,6 + 56,8) : 4 = 47,6* *Moyenne des y_i = (120 + 128 + 144 + 154) : 4 =136,5*			

- On écrit l'équation de la droite passant par ces deux points :
    - Pente = m = $\frac{136{,}5 - 87{,}5}{47{,}6 - 18} = \frac{49}{29{,}6} \approx 1{,}655$
    - p = 87,5 – 1,655 . 18 = 57,7

d ≡ *y* = 1,655*x* + 57,7 ; il s'agit de la droite de Mayer.



- On extrapole la fréquence cardiaque en utilisant la droite de régression pour *x* = 65 : pour un travail de 65 kJ, on trouve 165 battements par minute. De même, lorsque la fréquence cardiaque est de 100 battements par minute, le travail sera de 25,56 kJ.

<u>Par calcul</u> : Si x = 65 alors y = 1,655 . 65 + 57,7 = 165
Si y = 100 alors x = (100 – 57,7)/1,655 = 25,56 kJ