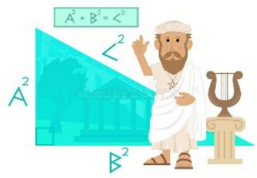
Collège Saint-Barthélemy
Y. Michiels

Mathématiaue – Troisième année

2

UAA2 – Triangle Rectangle

Théorème de Pythagore



OBJECTIFS – UAA2 : Le triangle rectangle

Connaitre

- Démontrer le théorème de Pythagore et sa réciproque.
- Reconnaître les conditions d'application du théorème de Pythagore, de sa réciproque et de sa contraposée.
- Associer une égalité entre deux expressions algébriques et une égalité d'aires.
- Interpréter le théorème de Pythagore en termes d'aires ou de longueurs.

Appliquer

- Calculer une longueur, une distance entre deux points situés dans un repère cartésien.
- Se servir de la réciproque de Pythagore pour vérifier qu'un triangle est rectangle, qu'un angle est droit.
- Construire un segment de longueur irrationnelle.

Transférer

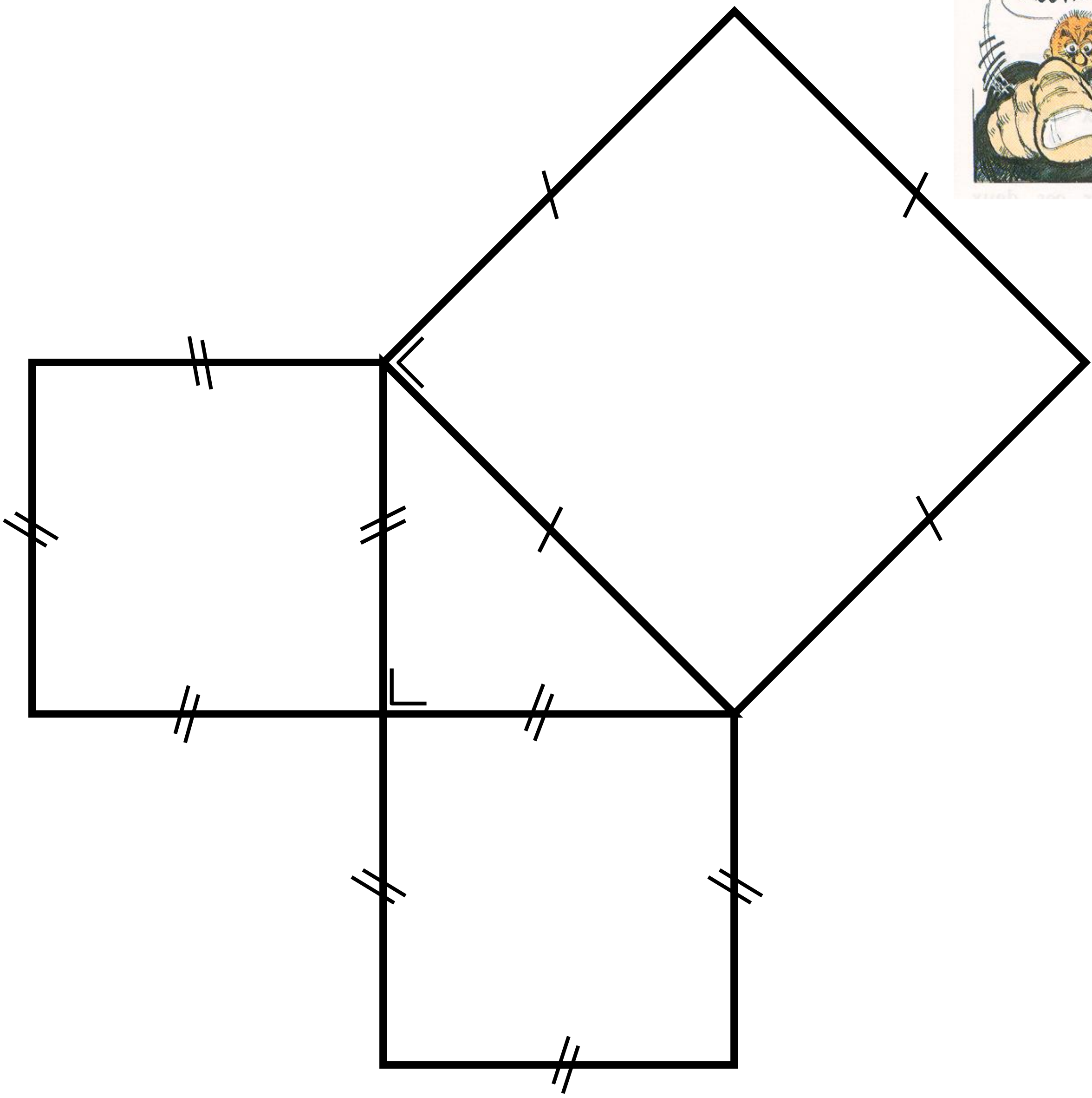
- Résoudre un problème de construction ou de calcul dans des situations qui conduisent à utiliser le théorème de Pythagore ou sa réciproque.
- Démontrer des propriétés géométriques en utilisant le théorème de Pythagore.

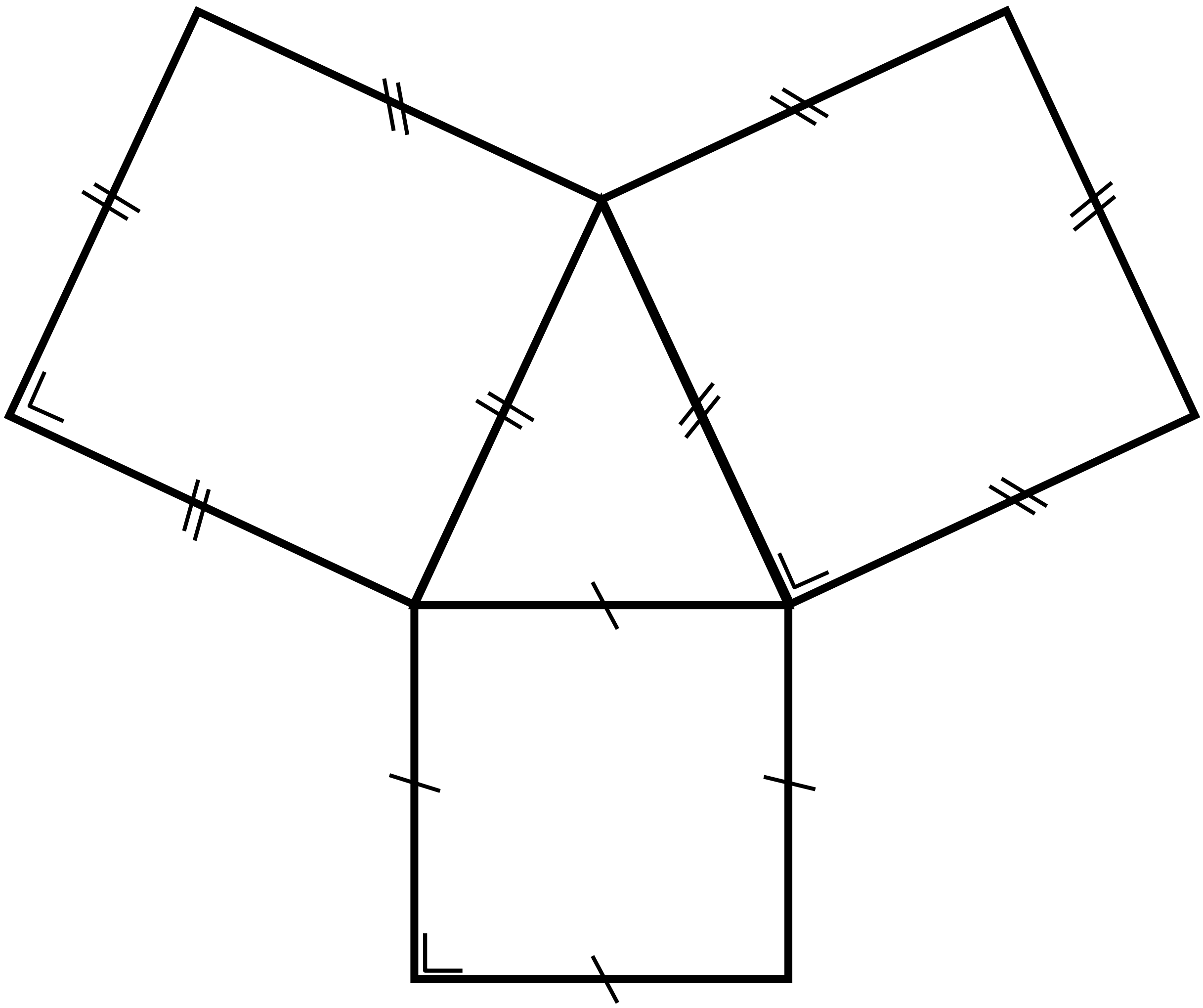
Exploration : Des triangles et des carrés…

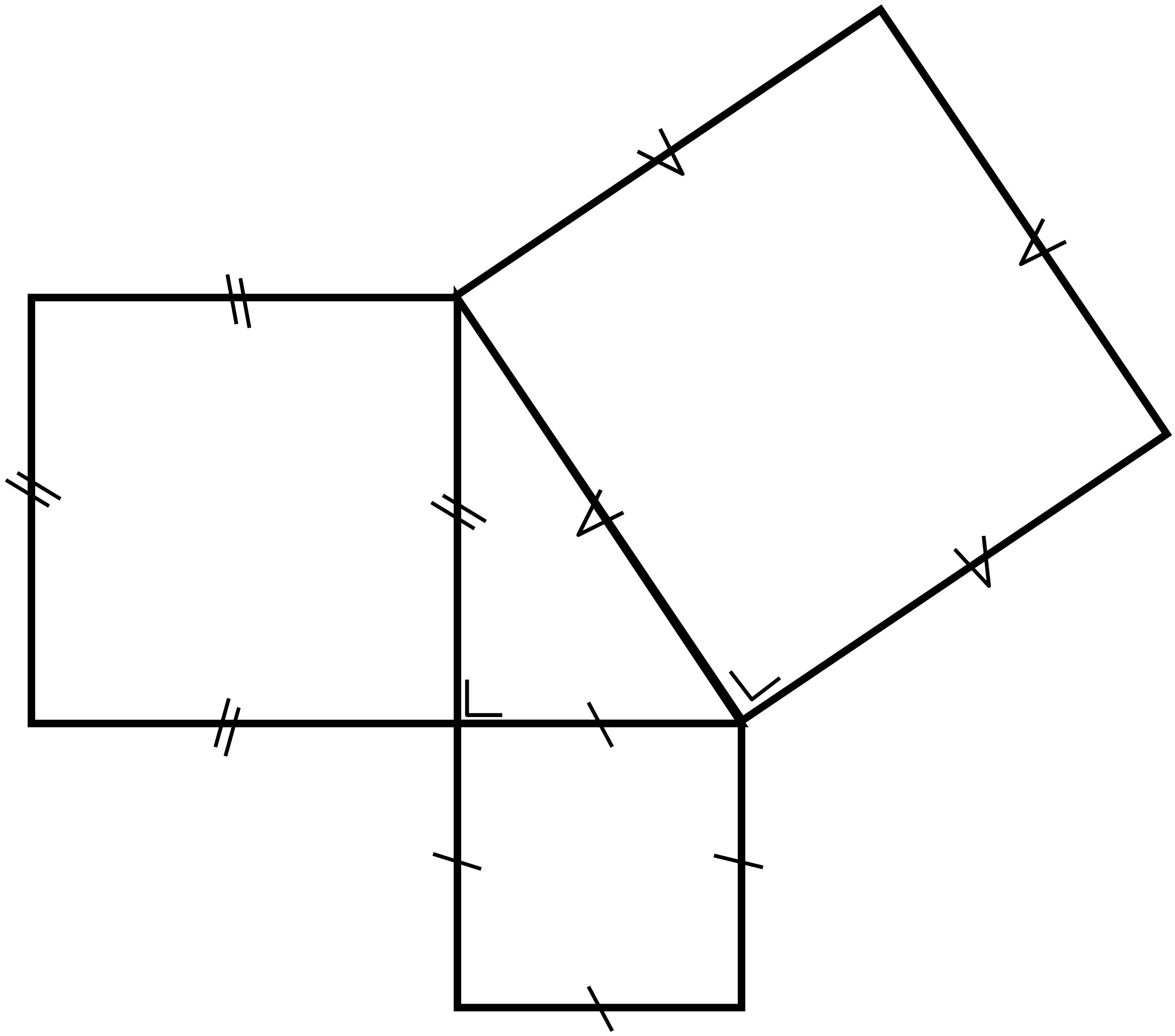
Tu as reçu trois feuilles de couleurs sur lesquelles sont représentés chaque fois un triangle particulier et des carrés construits sur ses côtés.

Trouve une relation qui lie les aires des formes géométriques représentées sur chaque figure.

Pour ce faire, tu peux mesurer, découper, calculer, … **MAIS** il est indispensable que tu « construises » un raisonnement, une explication qui doit « tenir la route » face aux commentaires des autres et du professeur !





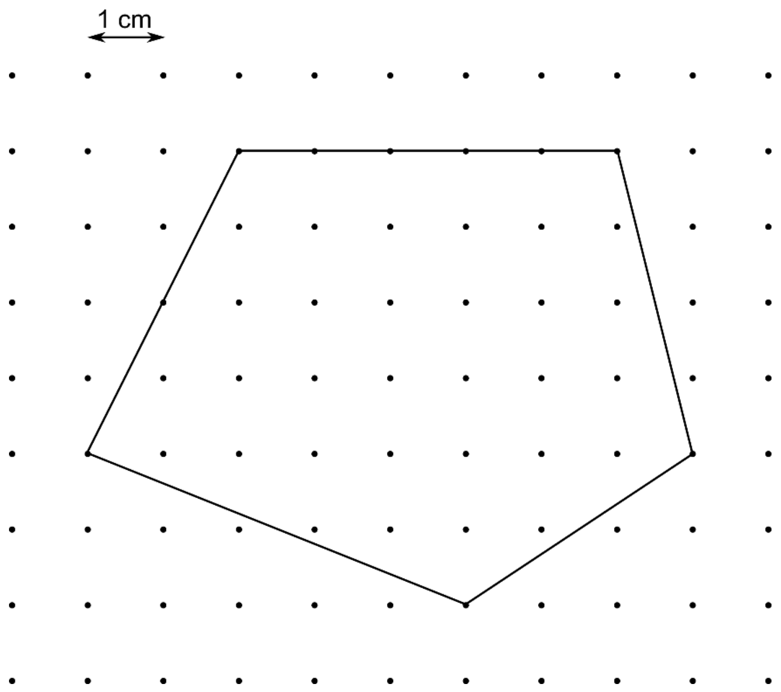


Théorie

Pages 10 à 12

Aires

Calcule l'aire de la figure dessinée dans le plan pointé. Fais apparaître toutes les constructions que tu as utilisées.

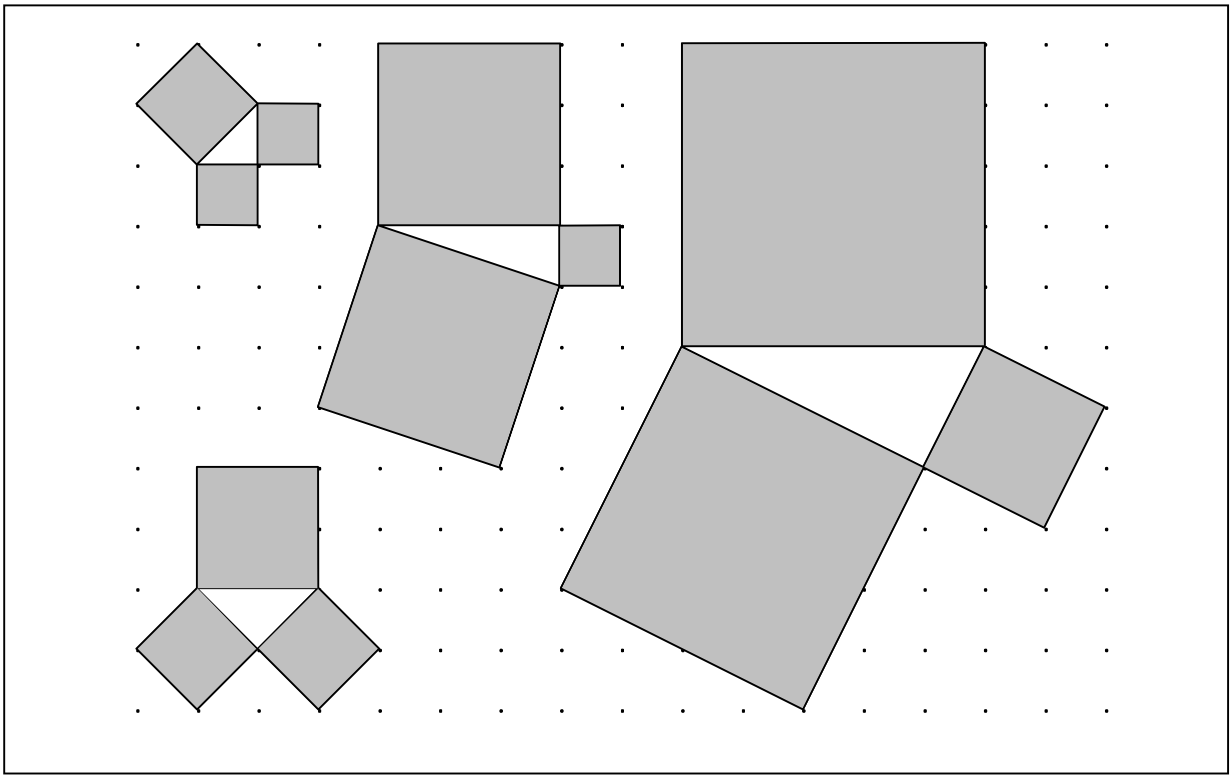


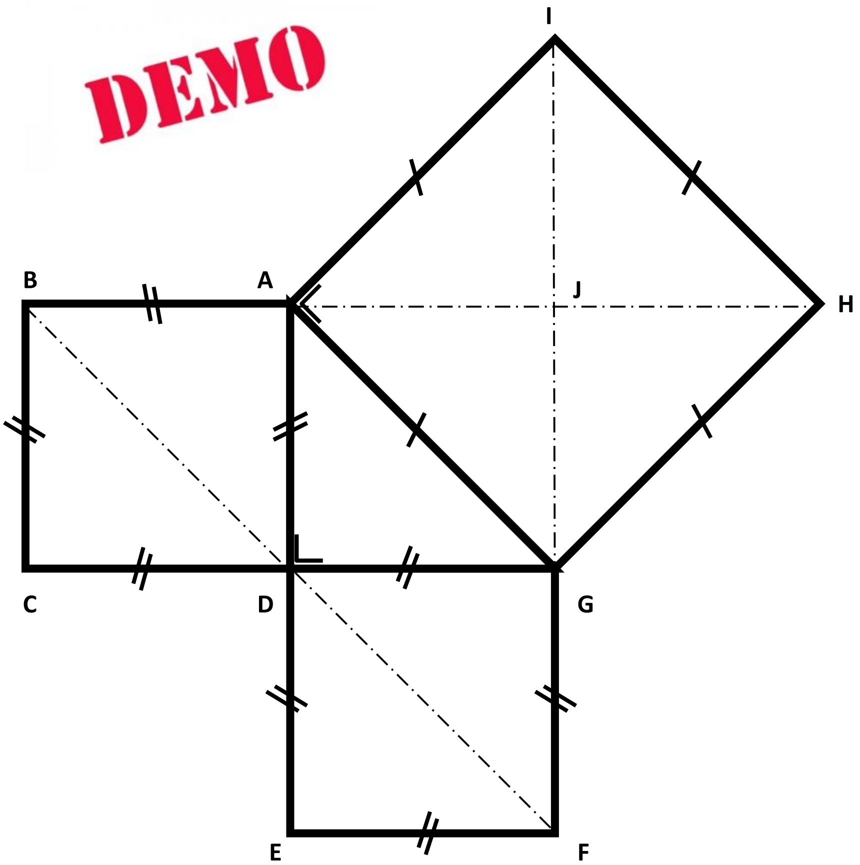
Triangles rectangles et carrés

Dans la figure ci-dessous, tu vois des carrés construits sur les côtés de triangles rectangles.

1] Calcule l'aire de chaque carré en prenant pour unité d'aire le carré du quadrillage.

2] Cherche une relation entre les aires des carrés construits sur un même triangle.





<u>Hypothèses</u> :

- △ADG isocèle et rectangle en D
- ABCD, DEFG et AGHI trois carrés

<u>Thèse</u> :

Aire ABCD + Aire DEFG = Aire AGHI

<u>Démonstration</u> :

1. Traçons les diagonales [BD] et [DF] dans les carrés respectifs ABCD et DEFG. Puis traçons les diagonales [IG] et [AH] dans le carré AGHI, qui se coupent en {J}

2. Montrons que les triangles BCD et ADG sont isométriques :
   - C $\overline{BC} = \overline{AD}$ $\square_1$
   - A $\widehat{BCD}° = \widehat{ADG}°$ $\square_1$
   - C $\overline{CD} = \overline{DG}$ $\square_1$

   $\Rightarrow$ △BCD iso △ADG $\square_2$

   $\Downarrow$ $\square_3$

   Aire △BCD = Aire △ADG

   D'une manière analogue, nous pouvons prouver que les triangles ABD, DEF et DGF ont tous la même aire que le triangle ADG.

3. Comme les diagonales d'un carré sont perpendiculaires, isométriques et se coupent en leur milieu, les quatre triangles rectangles AJI, IJH, HJG et AJG sont aussi isocèles.

4. Dans tout triangle rectangle isocèle, les angles à la base mesurent chacun (en particulier dans le △ADG) :

$$\widehat{DAG}° = \frac{180° - \widehat{ADG}°}{2} = 45°$$

5. Montrons maintenant que les triangles AIJ et ADG sont isométriques :
   - H $\overline{AG} = \overline{AI}$ $\square_1$
   - Aigu $\widehat{DAG}° = \widehat{JAI}°$ $\square_4$

   $\Rightarrow$ △BCD iso △ADG $\square_5$

   $\Downarrow$ $\square_3$

   Aire △AIJ = Aire △ADG

   D'une manière analogue, nous pouvons prouver que les quatre triangles AJG, IJH et GJH ont tous la même aire que le triangle ADG.

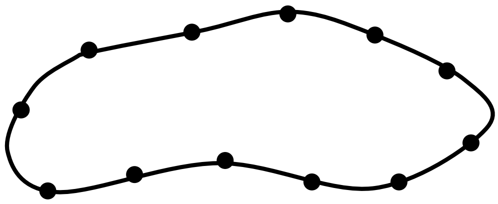
6. Conclusion :

(Aire △ABD + Aire △BCD) + (Aire △DEF + Aire △DGF) = (Aire △AJG + Aire △AJI + Aire △IJH + Aire △GJH)

Aire ABCD + Aire DEFG = Aire AGHI

La corde à 12 nœuds

Les architectes égyptiens utilisaient une corde comprenant 12 nœuds pour vérifier que les angles des murs qu'ils construisaient étaient bien droits. Explique comment ils s'y prenaient !

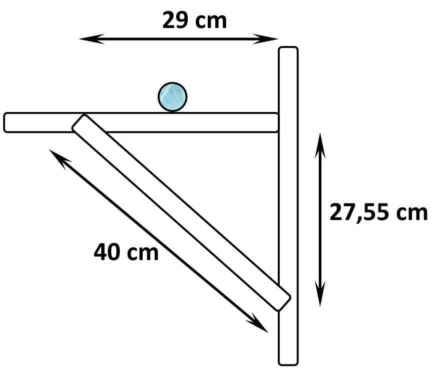


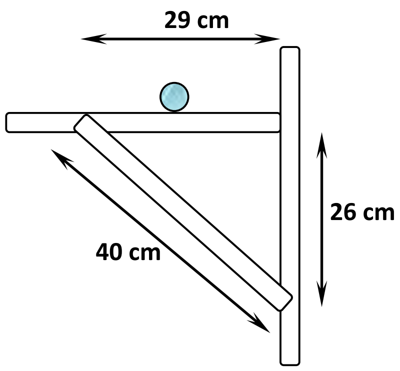
La corde n'est pas élastique, elle comprend 12 nœuds ; la distance entre deux nœuds est toujours la même.

Video explicative

Théorie
Pages 15 et 16

Mathilde (à gauche) et Victoria (à droite) réalisent une étagère dont voici les plans. Une fois les étagères montées, elles y disposent une bille. Celle-ci reste-t-elle en place ? Explique.





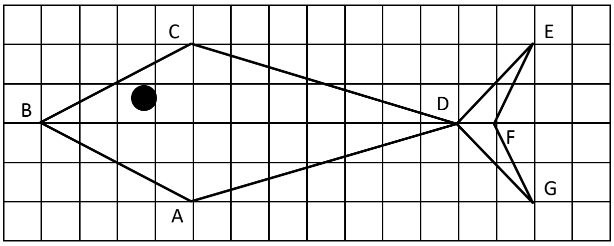
Pour vérifier l'angle droit entre deux murs, un maçon part du coin (C) du mur et marque un point A situé horizontalement à 30 cm de C (sur un des deux murs) puis marque un point B à 40 cm de C sur l'autre mur. Enfin, il mesure la longueur du fil tendu entre les deux repères.

1] *Représente la situation.*

2] *Quel doit-être le résultat de la mesure pour que l'angle soit droit ? Pourquoi ?*

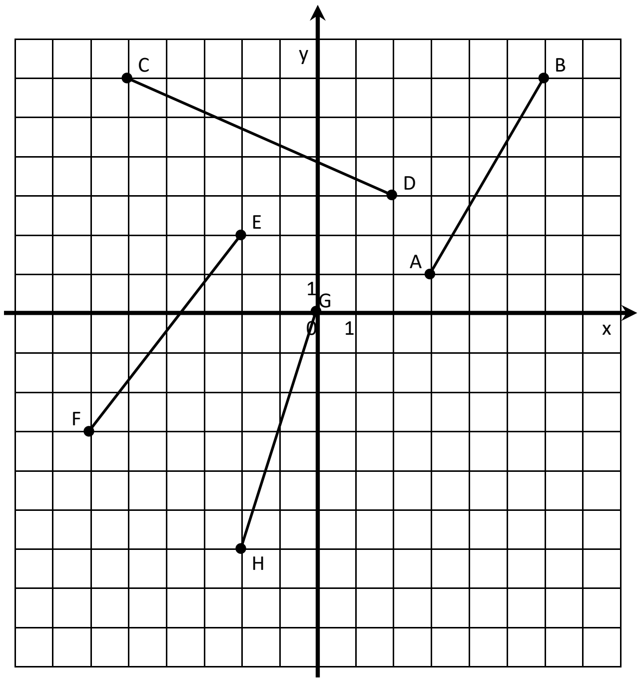
Avec un quadrillage

Calcule le périmètre du poisson ci-dessous (unité : côté du petit carré).



Distance entre deux points

1] En utilisant le théorème de Pythagore, calcule la longueur des segments [AB], [CD], [EF] et [GH].



2] Comment calculer la distance entre les points A $(x_a ; y_a)$ et B $(x_b ; y_b)$?

Les triplets pythagoriciens

Les triplets de nombres naturels (3 ; 4 ; 5) et (30 ; 40 ; 50) sont des triplets pythagoriciens parce qu'ils vérifient l'égalité :

$$\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$$

Pythagore et ses disciples les ont beaucoup étudiés en rapport avec les triangles rectangles.

1] Trouves-en d'autres.

2] Les Pythagoriciens ont établi que les triplets dont les composantes sont de la forme :

$$m \; ; \; \frac{1}{2}(m^2 - 1) \; ; \; \frac{1}{2}(m^2 + 1)$$

où la lettre m représente n'importe quel nombre naturel impair, sont des triplets pythagoriciens.

- ✓ Utilise cette formule pour trouver 3 ou 4 autres triplets
- ✓ Vérifie que le carré du troisième terme est égal à la somme des carrés des deux autres termes.
- ✓ Explique pourquoi m doit être un nombre naturel impair.

SYNTHESE : LE THEOREME DE PYTHAGORE

1. INTRODUCTION[1]

Pythagore est né à Samos, une petite île près de l'Asie Mineure, au VIè siècle av. J.-C. Vers 530 av. J.-C., il s'installe à Crotone, en Italie méridionale. Il y fonde une communauté, dite des Pythagoriciens, à la fois religieuse, philosophique et politique, organisée sur un modèle égalitaire. On y prônait des vertus morales et civiques comme le courage, l'austérité, la maîtrise de soi, la modération, l'effort et la discipline collective.

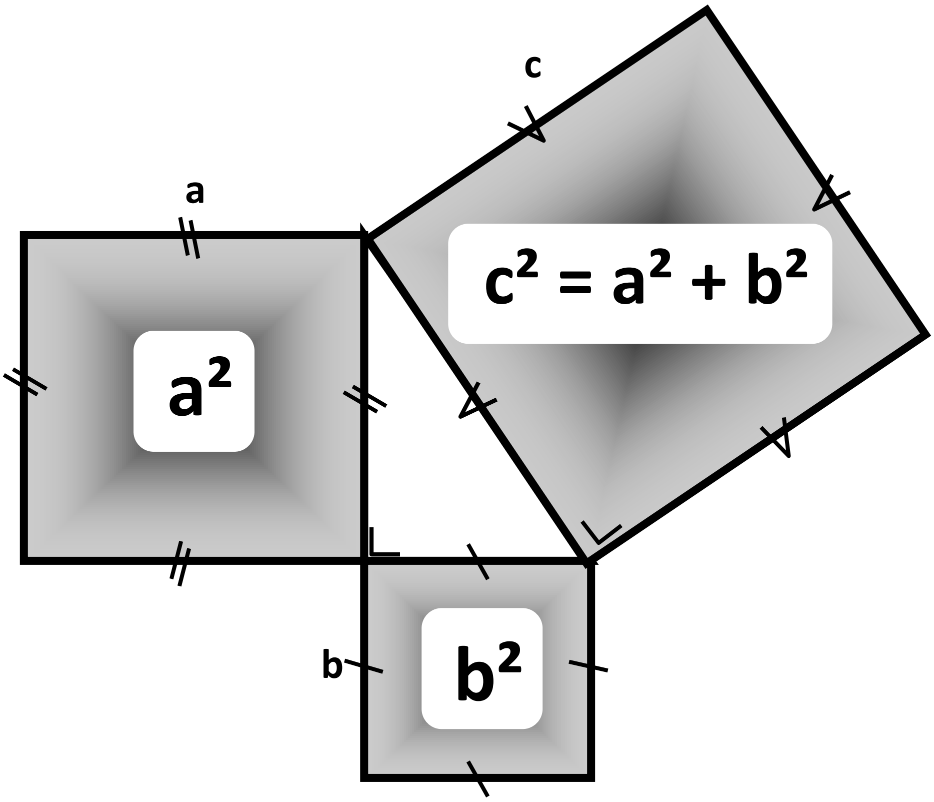
En outre, les pythagoriciens attribuaient aux nombres un rôle mystique dans le contexte de la religion. Ils croyaient en particulier que l'univers et tout ce qu'il renferme pouvait s'expliquer à l'aide des nombres naturels. Ainsi conçues, les mathématiques dépassaient de loin les recettes pratiques en usage chez les artisans, les marchands et les navigateurs.

Dans les cités grecques de l'Antiquité, on cultivait la pratique des débats publics souvent passionnés. On discutait sur les grands problèmes d'intérêt général. Pour cette raison, on a perfectionné l'art de convaincre. On peut penser que c'est parce qu'ils étaient imprégnés de cette culture de l'argumentation que Pythagore et les Grecs ont fait des mathématiques une science démonstrative, c'est-à-dire une science où on doit convaincre les autres de la justesse de ses affirmations.

2. ENONCE DU THEOREME DE PYTHAGORE EN TERMES D'AIRES

2.1. Enoncé

Dans tout triangle rectangle, l'aire du carré construit sur l'hypoténuse[2] est égale à la somme des aires des carrés construits sur les deux autres côtés.



[1] GEM, ***Mathématiques 3 : De question en question***, Didier HATIER, Bruxelles, 1996

[2] Côté opposé à l'angle droit d'un triangle rectangle.

*Dans nos recherches, nous avons utilisé un dessin semblable à la **figure 1** :*

2.2. Justification (La démonstration faite en classe figure dans ton cahier)

En plaçant quatre triangles rectangles isométriques (T_1-T_2-T_3 et T_4) dans un carré dont la longueur du côté est la somme des longueurs des côtés de l'angle droit comme sur la **figure 1**, puis en les déplaçant pour obtenir la **figure 2**, on peut démontrer ce théorème par équivalence des aires obtenues.

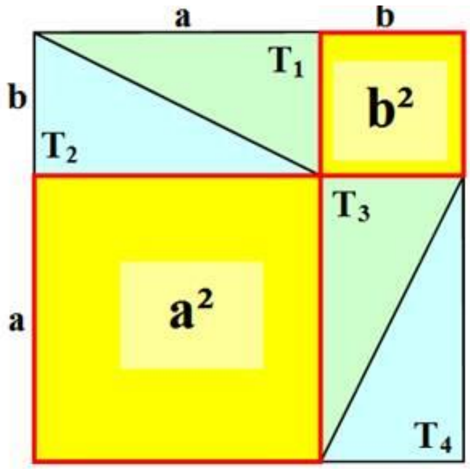


Figure 1

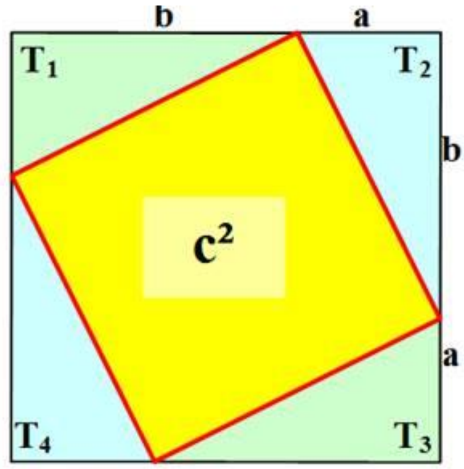


Figure 2

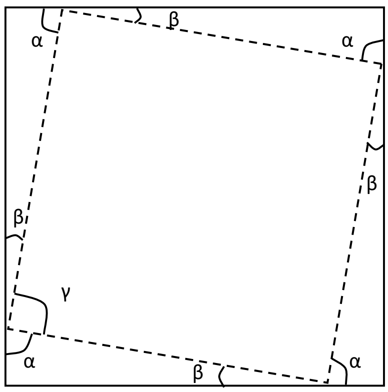
Dans la **figure 1**, l'aire non occupée par les quatre triangles rectangles isométriques au triangle de départ est occupée par deux carrés construits sur les côtés de l'angle droit du triangle de départ.

Dans la **figure 2**, l'aire non occupée par les ces mêmes triangles disposés autrement ***semble*** occupée par un carré construit sur l'hypoténuse du triangle de départ.

On sait déjà que les quatre côtés ont même longueur, celle de l'hypoténuse du triangle rectangle de départ.

Il reste à trouver un angle droit.

Pour ce faire, il faut utiliser des propriétés sur l'amplitude des angles d'un triangle.



Dans chaque triangle rectangle, on a :

$$\alpha° + \beta° = 180° - 90° = 90° \qquad 🗀_1$$

Or

$$\alpha° + \beta° + \gamma° = 180°$$

Donc

$$\gamma° = 90°$$

<u>Conclusion</u> : la figure centrale est un carré. 🗀$_2$

L'aire du « grand » carré est donc bien égale à la somme des aires des deux « petits » carrés.

<u>Propriétés, théorèmes, définitions,… utilisés</u> :

🗀$_1$ **:** ***La somme des amplitudes des angles intérieurs d'un triangle est de 180°.***

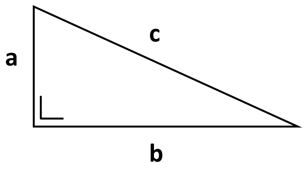
🗀$_2$ **:** ***Tout quadrilatère qui a les quatre côtés de même longueur et un angle droit est un carré.***

3. ENONCE DU THEOREME DE PYTHAGORE EN TERMES DE LONGUEURS

3.1. Enoncé

Dans tout triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit.

Si on désigne par ***a*** et ***b*** les côtés de l'angle droit et par ***c*** l'hypoténuse, le théorème se traduit de la sorte :

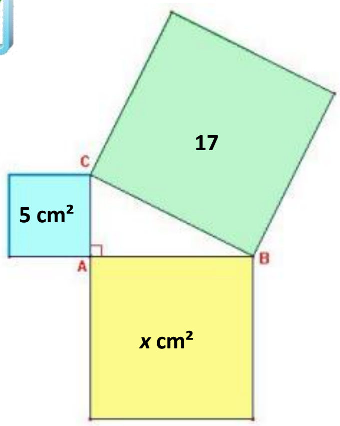


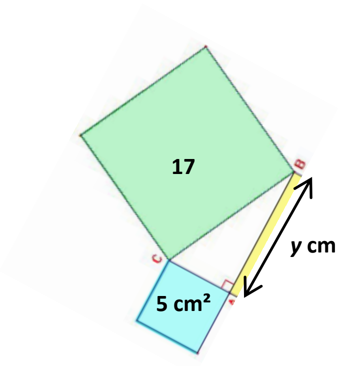
$$a^2 + b^2 = c^2$$

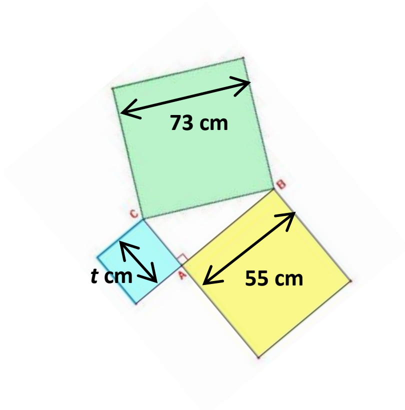
En effet, les carrés des longueurs des côtés du triangle, a^2, b^2 et c^2, sont égaux aux aires des carrés construits sur ces mêmes côtés.

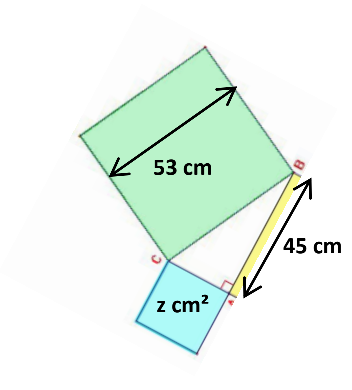
3.2. Applications simples

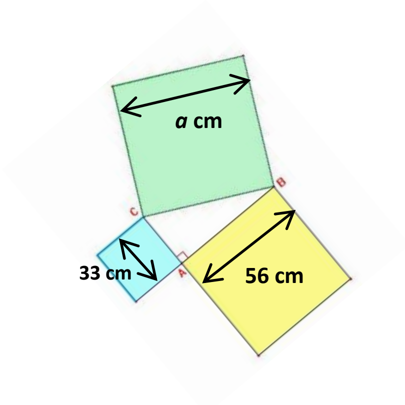
1] Calcule l'aire ou la longueur demandée :

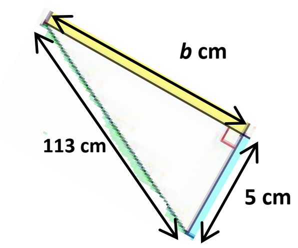










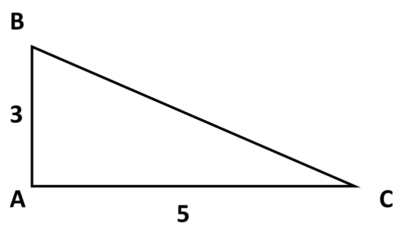


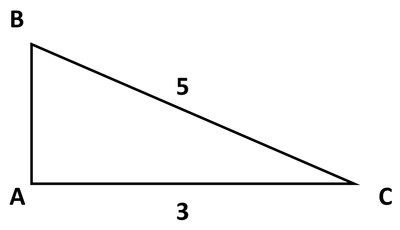
2] Construire un segment de longueur $\sqrt{13}$ cm puis $\sqrt{27}$ cm.

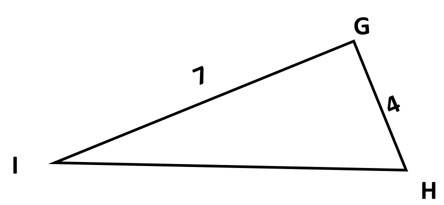
3] Dans un triangle rectangle, un côté de l'angle droit mesure 3 cm de moins que l'hypoténuse. Sachant que l'autre côté de l'angle droit mesure 5 cm, calcule cette hypoténuse.

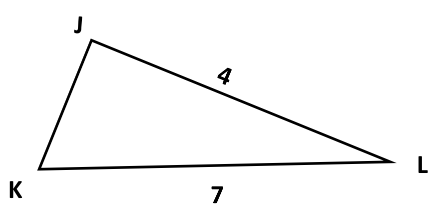
4] Dans chaque triangle rectangle ci-dessous :

- marque l'angle droit à l'aide du signe « ∟ » ;
- repasse l'hypoténuse en rouge ;
- écris la relation de Pythagore en utilisant les sommets des triangles ;
- calcule la longueur manquante ;
- encadre-la à l'unité près.







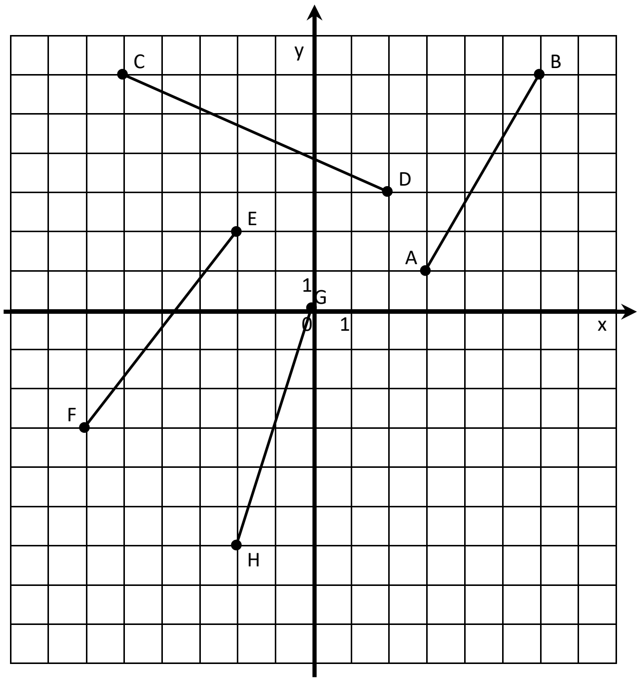


5] Pour chaque triangle XYZ, rectangle en X, calcule les longueurs inconnues.

	$\overline{YZ}$	$\overline{XY}$	$\overline{XZ}$
△1		7	9
△2	11		5
△3	15	11	
△4		7	12
△5	$\frac{5}{2}$		$\frac{3}{2}$
△6	5x + 2	4x + 3	3x – 8

COUP DE CŒUR calcule « x » sachant le Δ6 est rectangle en X

6] En utilisant le théorème de Pythagore, calcule la longueur des segments [AB], [CD], [EF] et [GH].



7] Dans un repère orthonormé, on donne les points A (2 ; 5) B (5 ; 3) et C (7 ; 0). Quelle est la nature (isocèle, équilatéral, rectangle,…) de ce triangle ?

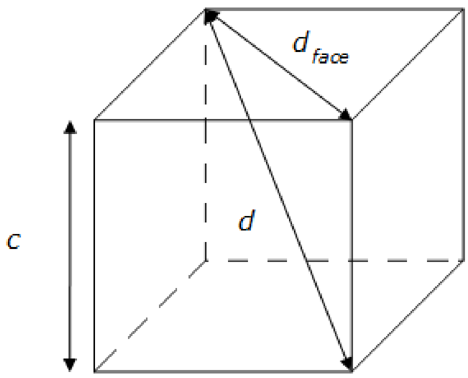
8] Dans un triangle rectangle, les côtés de l'angle droit mesurent respectivement 14 et 18 cm. Calcule la longueur des médianes relatives à ces côtés.

9] Les côtés isométriques d'un triangle isocèle mesurent 15 cm et la base 7 cm. Calcule la longueur de la hauteur relative à la base de ce triangle.

10] Calcule la longueur de la diagonale d'un carré de 7 cm de côté. Fais de même avec un carré de « a » cm de côté.

11] Calcule la longueur de la diagonale « d » d'un cube de 7 cm de côté. Fais de même avec un cube de « c » cm d'arête.

12] Calcule la longueur de la diagonale d'un parallélépipède rectangle de longueur 8 cm, de largeur 5 cm et de 3 cm de hauteur. Fais de même en désignant par « L » sa longueur, par « l » sa largeur et par « h » sa hauteur.



4. RECIPROQUE ET CONTRAPOSEE DU THEOREME DE PYTHAGORE

4.1. Notions générales

Dans un théorème, les ***hypothèses*** reprennent les propriétés, caractéristiques,… supposées et ***thèse*** la propriété que l'on veut démontrer. Souvent, un théorème s'exprime sous forme d'implication ($\Longrightarrow$) et utilise les mots « liens » - ***Si… alors…***

Implication simple :

Si la ***proposition A*** est vraie, **alors** ***la proposition B*** est aussi vraie

(proposition : $A \Rightarrow B$)

Réciproque d'une simple implication :

Une réciproque d'un théorème est un nouvel énoncé obtenu en plaçant la thèse parmi les hypothèses du nouvel énoncé et en prenant comme thèse une partie (au moins) des hypothèses du théorème initial.

Une réciproque d'un théorème n'est pas toujours un énoncé vrai.

Pour l'exemple ci-dessus, la **réciproque** sera **(!!! pas toujours vraie !!!)** :

Si la ***proposition B*** est vraie, **alors** ***la proposition A*** est aussi vraie

(réciproque : $B \Rightarrow A$)

Contraposée d'une simple implication :

La contraposée, par contre, est une autre manière d'exprimer la même propriété ; elle exprime le fait que **la proposition B est une condition nécessaire à la proposition A**.

Si une implication est vraie, sa contraposée le sera toujours également.

Dans notre exemple ci-dessus, la **contraposée** s'écrira (toujours vraie si la proposition est vraie) :

Si la ***proposition B n'***est ***pas*** vraie, **alors** ***la proposition A n'***est ***pas*** vraie non plus

(contraposée : non B $\Rightarrow$ non A) **En L.M. : $\sim B \Rightarrow \sim A$**

Exemple d'implication simple :

Proposition **:**

Si il pleut, ***alors*** le sol est mouillé.

Réciproque **:**

Si le sol est mouillé, ***alors*** il pleut.

La réciproque d'un théorème « vrai » n'est pas toujours « vraie »

Proposition **:**

Si il pleut, ***alors*** le sol est mouillé.

Contraposée **:**

négation

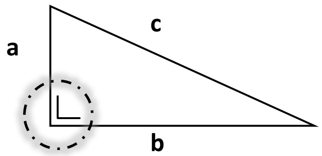
négation

Si le sol ***n'***est ***pas*** mouillé, ***alors*** il ***ne*** pleut ***pas***.

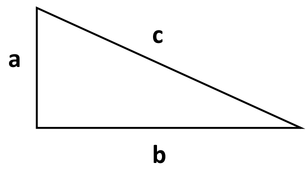
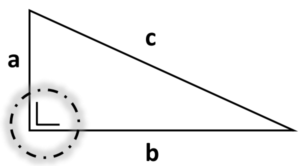
La contraposée d'une implication « vraie » est toujours « vraie »

4.2. Enoncé de la réciproque du théorème de Pythagore

Pour le théorème de Pythagore :

Hypothèse		Thèse
Si  *Triangle rectangle*	$\Longrightarrow$ alors	$a^2 + b^2 = c^2$

Réciproque de Pythagore :

Hypothèse		Thèse
Si  $a^2 + b^2 = c^2$	$\Longrightarrow$ alors	 *Triangle rectangle*

Si les longueurs *a*, *b* et *c* des trois côtés d'un triangle vérifient l'égalité

$$a^2 + b^2 = c^2$$

alors le triangle est rectangle et le côté de longueur « *c* » est son hypoténuse.

Hypothèse : △ dont les côtés mesurent a, b et c et tels que $a^2 + b^2 = c^2$

Thèse : Ce triangle est rectangle

Démonstration :

- Il existe une et un seul triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent ***a*** et ***b*** (critère ***CAC***)
- Si « ***x*** » est son hypoténuse, alors $x^2 = a^2 + b^2$ (***Théorème de Pythagore***). Donc ***x*** = ***c.***
- Si deux triangles ont leurs trois côtés respectivement de même longueur, alors ils sont isométriques (critère ***CCC***). Seul le triangle ainsi construit correspond aux mesures ***a***, ***b*** et ***c***

Contraposée de Pythagore :

Si, dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand des côtés n'est pas égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle n'est pas rectangle.

Exemple :

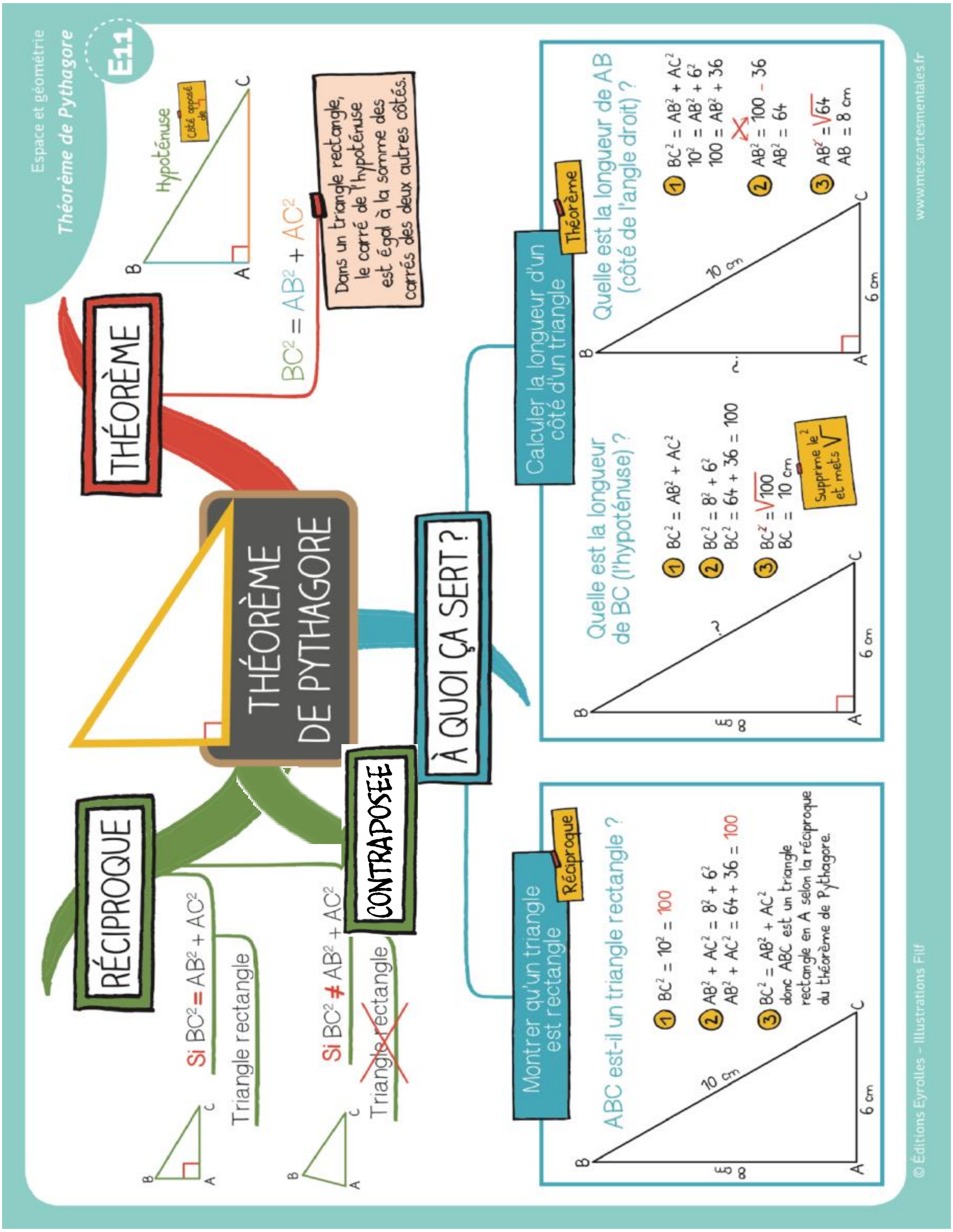
Les 3 longueurs des côtés d'un triangle sont 3 cm, 5 cm et 6 cm. Ce triangle est-il rectangle ?

Comme le calcul montre que :

$$6^2 \neq 5^2 + 3^2 \qquad (36 \neq 25 + 9)$$

On en déduit que ce triangle n'est pas rectangle !

4.3. Schéma Heuristique du théorème de Pythagore



4.4. Applications simples

1] Dans chaque ligne du tableau ci-dessous figurent les dimensions d'un triangle XYZ. Indique, pour chaque triangle, s'il est rectangle et si oui, en quel sommet.

	$\overline{YZ}$	$\overline{XY}$	$\overline{XZ}$
$\triangle 1$	6	10	8
$\triangle 2$	74	45	60
$\triangle 3$	5/2	2	3/2
$\triangle 4$	$\sqrt{31}$	7	9
$\triangle 5$	3x + 4	4x + 3	5x + 5

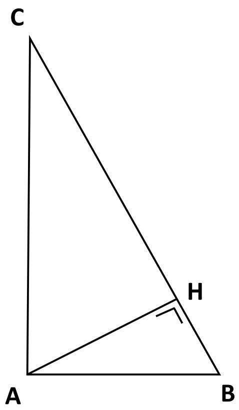
← calcule « x » pour que le Δ5 soit rectangle en Y

2] Un seul des deux triangles ABC OU RST est rectangle. Lequel ?

$\overline{HB} = 3$

$\overline{AH} = 4$

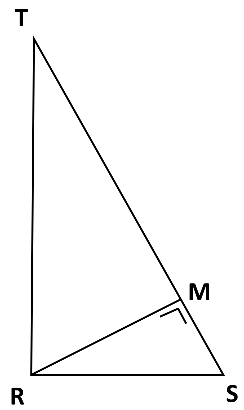
$\overline{BC} = 8$



$\overline{MS} = 1$

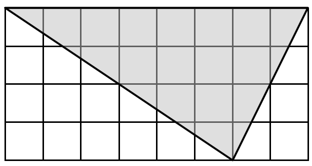
$\overline{MR} = 2$

$\overline{ST} = 5$



3] ***Avec un quadrillage***…

Le triangle ci-contre est-il rectangle ?



5. QUELQUES EXERCICES…

1] Quelle est la longueur minimale de l'échelle qui te permettra de cueillir la pomme se trouvant à une hauteur de trois mètres sur un arbre entouré d'une marre d'eau de 2 m de rayon (tu ne désires pas te mouiller les pieds).

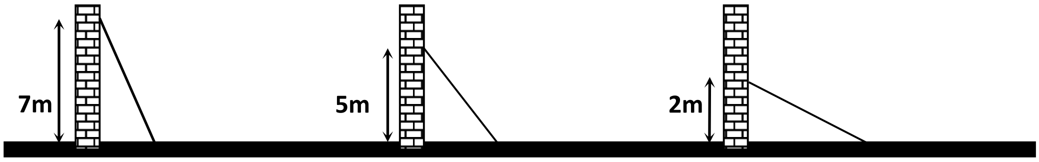
2] L'ombre d'un bâton posé sur un muret de 1,2 m de haut est 1 m plus petite que le bâton quand le soleil est au zénith (à la verticale par rapport au bâton). Quelle est la longueur de ce bâton ?

3] **Une équation vieille de 4 mille ans**

Un roseau est placé verticalement contre un mur. S'il descend de 3 coudées (1 coudée = 52,5 cm) il s'écarte du mur de 9 coudées. Quelle est la longueur du roseau ?

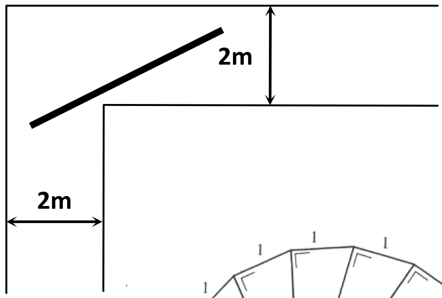
4] Dans un repère orthonormé, on donne les points A (3 ; 5) B (5 ; 2) et C (4 ; -1). Quelle est la nature (isocèle, équilatéral, rectangle,…) de ce triangle ?

5] Calcule pour chaque situation la distance entre le pied d'une échelle de 10 m et le mur.

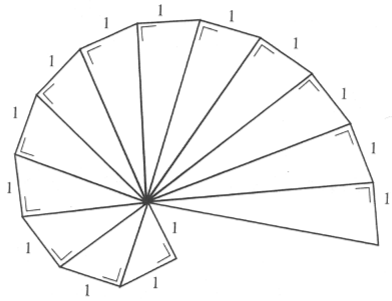


6] On a dressé un mât de 8,15m de hauteur au-dessus du sol. Un tendeur de 9m de long attaché au sommet s'écarte de 4,05m du pied du mât. Celui-ci est-il vertical ? Justifie. Si non, que faudrait-il modifier pour qu'il le soit ?

7] Puis-je tourner sans problème dans le couloir de 2m de large représenté ci-dessous avec une poutre de 3m de long ? de 5m de long ? de 7m de long ? sachant que je la maintiens horizontalement.



8] Observe la construction ci-contre. Les triangles sont tous rectangles et de plus, la longueur d'un des côtés de l'angle droit est toujours de 1 cm. Calcule la longueur des hypoténuses de ces triangles. Que constates-tu ?



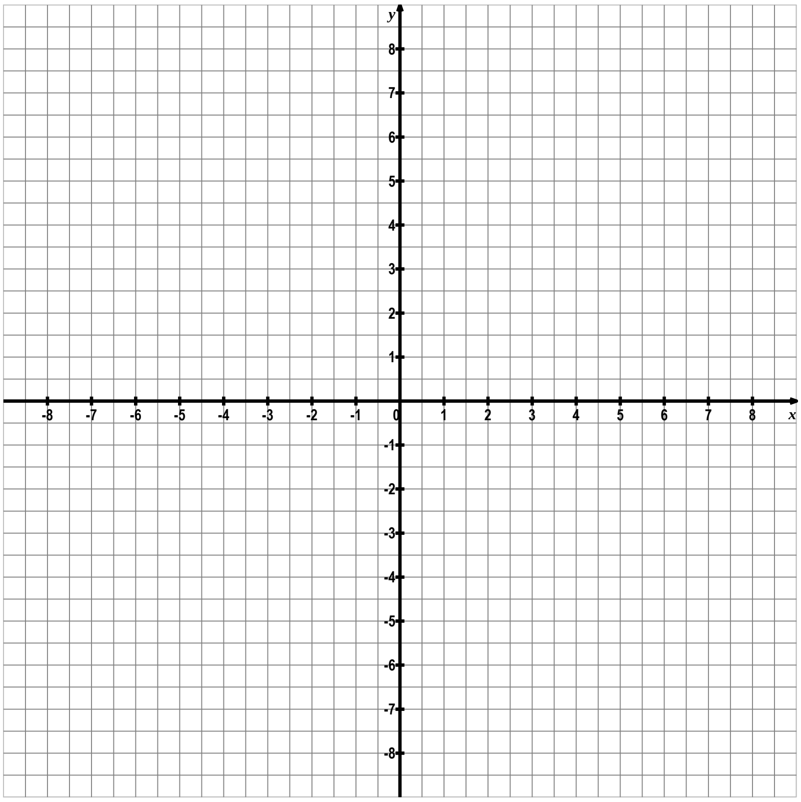
9] Je fais la sieste au bord d'une rivière de 5m de large. J'aperçois juste en face de moi un bâton planté au milieu de la rivière qui dépasse de 1m. J'ai envie de l'attirer vers moi. J'y parviens et je constate alors que l'extrémité du bâton touche juste la berge. Puis-je traverser sans me noyer, sachant que je mesure 1,60m et que je ne sais pas nager ?

10] Le schéma ci-contre représente l'entrée d'un tunnel. Le demi-cercle intérieur a un diamètre de 8m. Un camion de 2,40 m de large emprunte ce tunnel. Quelle est, en « théorie », la hauteur maximale du camion ? (1^{er} cas si le camion roule à droite – $2^{ème}$ cas si le camion peut rouler où il veut)

6. DISTANCE ENTRE DEUX POINTS DANS LE PLAN CARTESIEN

Parmi les nombreuses applications du théorème de Pythagore, le calcul de la distance entre deux points du repère cartésien est très intéressant.

La distance entre le point *A (x_A ; y_A)* et le point *B(x_B ; y_B)* peut se calculer en appliquant la formule :



$$\boxed{\overline{AB} = d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

Complète le dessin :

En effet, dans le triangle rectangle ABC, on a :

$$\overline{AC} = |y_B - y_A| \qquad \text{et} \qquad \overline{BC} = |x_B - x_A|$$

En appliquant le théorème de Pythagore :

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

<u>Exercices</u> :

1] Dans un repère orthonormé, on donne les points A (2 ; 5) B (5 ; 3) et C (7 ; 0). Quelle est la nature (isocèle, équilatéral, rectangle,…) de ce triangle ?

2] Dans un repère orthonormé, on donne les points A (4 ; 3) B (10 ; 5) C (5 ; 10) D (11 ; 2) et E (12 ; 9). Quelle est la nature (isocèle, équilatéral, rectangle,…) des triangles ABC, ABD, ACD et celle du quadrilatère CADE ?

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES
MATH POUR RÉUSSIR : PAGES 101 À 105