COLLEGE SAINT-BARTHELEMY

MATHEMATIQUE

PREMIERE ANNEE

SOLIDES ET FIGURES

Troisième partie : Les figures planes

Médiatrice et Bissectrice

Distances - Angles

Triangles et quadrilatères

ANNEE SCOLAIRE 202… - 202…

Compétences

Expliciter les savoirs et les procédures

- Comprendre et utiliser, dans leur contexte, des termes usuels propres à la géométrie des figures planes.
- Reconnaitre et comparer différents types de représentations planes de solides.
- Énoncer et comprendre quelles propriétés suffisent pour construire des figures géométriques particulières. (Définitions et propriétés)
- Reconnaitre, comparer, différencier et classer des figures planes.
- Relever des régularités dans des familles de figures planes et en tirer des propriétés relatives aux angles, aux distances et aux droites remarquables.
- Reconnaitre des angles adjacents, complémentaires, supplémentaires.
- Déduire des mesures d'angles à l'aide de propriétés dans des situations simples.

Appliquer une procédure

- Tracer des figures simples avec des instruments.
- Reproduire une figure plane en vraie grandeur ou à l'échelle.
- Tracer une droite perpendiculaire à une autre.
- Tracer la médiatrice d'un segment ; la bissectrice d'un angle.
- Tracer la hauteur d'un triangle ou d'un parallélogramme.
- Tracer une médiane d'un triangle ou d'un quadrilatère.
- Tracer un hexagone régulier et un carré inscrits à un cercle.
- Mesurer l'amplitude d'un angle avec un rapporteur.
- Tracer un angle d'amplitude donnée.
- Reporter des angles.

Résoudre un problème

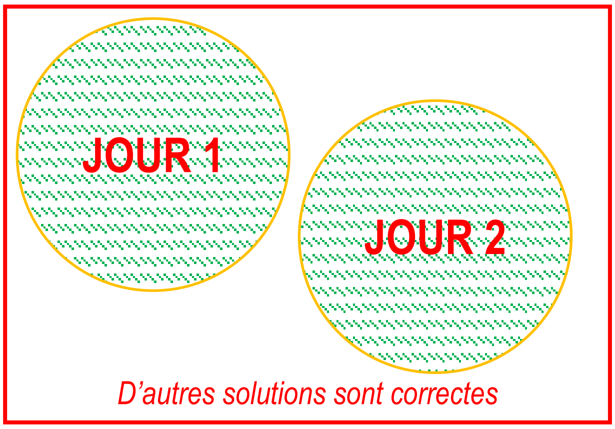
- Résoudre des problèmes d'aires, de volumes, de développement.
- Résoudre des problèmes de construction à propos de triangles, de cercles ou de quadrilatères.
- Résoudre des problèmes faisant intervenir des longueurs ou des aires de figures planes.
- Résoudre des problèmes de construction à propos d'angles de mesures particulières

EXPLORATION : LES DISTANCES

1. Une chèvre broute dans un pré de 80 m sur 55 m. Elle est attachée par une corde de 18 m à un piquet situé au départ n'importe où dans le pré.

a) Dessine le pré à l'échelle 1/1000 et montre sur ce dessin la partie du pré que la chèvre peut brouter.

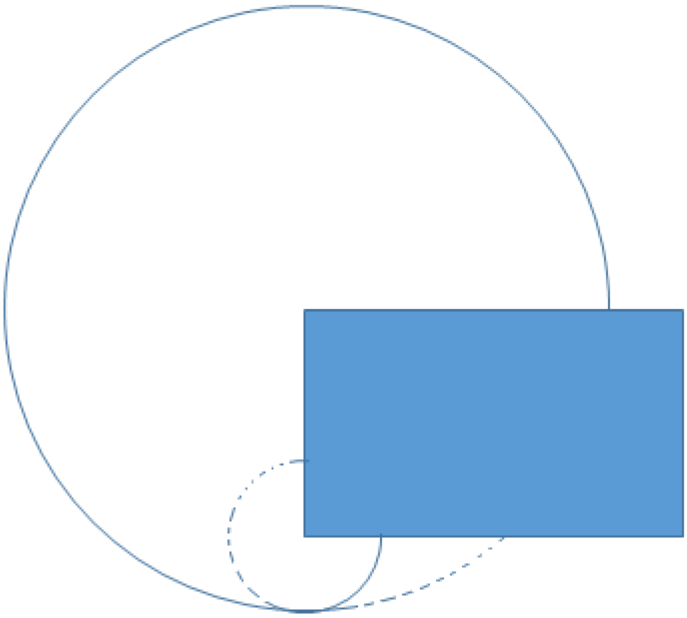
b) Où placer le piquet le lendemain pour que la chèvre dispose de la même quantité d'herbe ? (Hachure toute la zone).



2. La chèvre est maintenant attachée au coin d'une étable (dans un pré) de 5 m sur 3 m mais avec une corde de 4 m

a) Dessine cette étable à l'échelle 1/100 et montre sur ce dessin la partie du pré que la chèvre peut brouter.

b) Même question si la corde mesure 8 m puis 10 m (**voir aide ci-dessous**).



Aide : https://www.geogebra.org/m/ugzZjfJk

Théorie page 6

CHAPITRE 9 : CONSTRUCTION ET PROPRIETES DE FIGURES PLANES

1. LES DISTANCES

Exploration : Les distances

1.1. Distance entre deux points

Etablir la distance entre deux points **A** et **B** signifie:

1] Choisir une unité. Ex: le millimètre - *mm*

2] Etablir une mesure, c'est-à-dire compter le long du segment **[AB]** le nombre de fois que l'unité choisie est comprise entre **A** et **B**. Ex: 27.

Résultat:

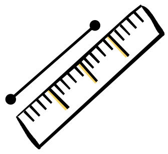
$$\left.\begin{array}{c}\text{si l' unité choisie est le millimètre}\\ \text{et}\\ \text{si la mesure est 27}\end{array}\right\}\text{alors la distance est 27 mm.}$$

1.2. Notations :

On notera:

L.L. : La ***distance*** entre le point A et le point B est de 27 mm

L.M. : d(**A**,**B**) = 27 *mm*



Ou bien :

L.L. : La ***longueur*** du segment [AB] est de 27 mm

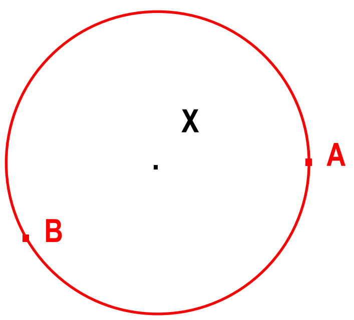
L.M. : $\overline{AB} = 27\ mm.$

1.3. Exercices

1] Construis un point **A** à 2 cm du point **X** donné ; construis un deuxième point **B** à 2 cm du point **X**.

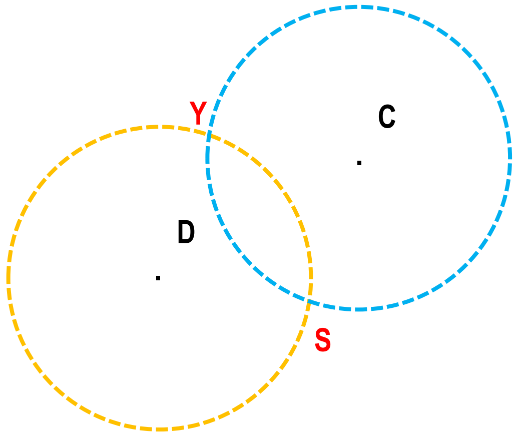
Construis tous les points du plan de la feuille distants de 2 cm du point **X**.

La figure formée par l'ensemble de tous les points dessinés est **un cercle de centre X et de 2 cm de rayon**

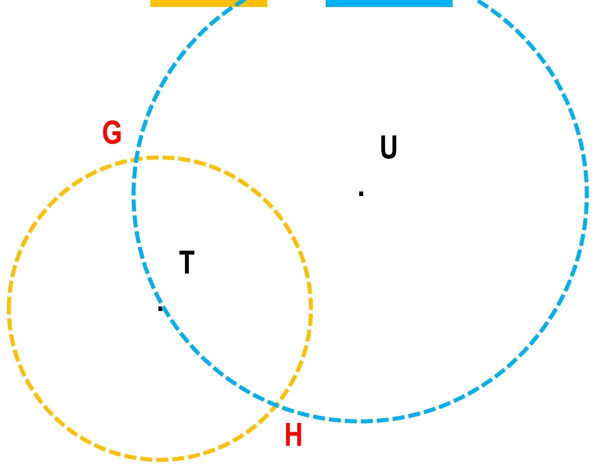


2] Dessine tous les points situés à 2 cm de **C** et à 2 cm de **D**.

Combien en as-tu trouvé ? **Nomme-les. Il y a deux points qui vérifient les 2 conditions en même temps → Y et S, les points d'intersection entre les 2 cercles**



3] Place les points **G** et **H** situés à 2 cm de **T** et à 3 cm de **U**.



2. LE COMPAS

Exploration : Construction de triangles

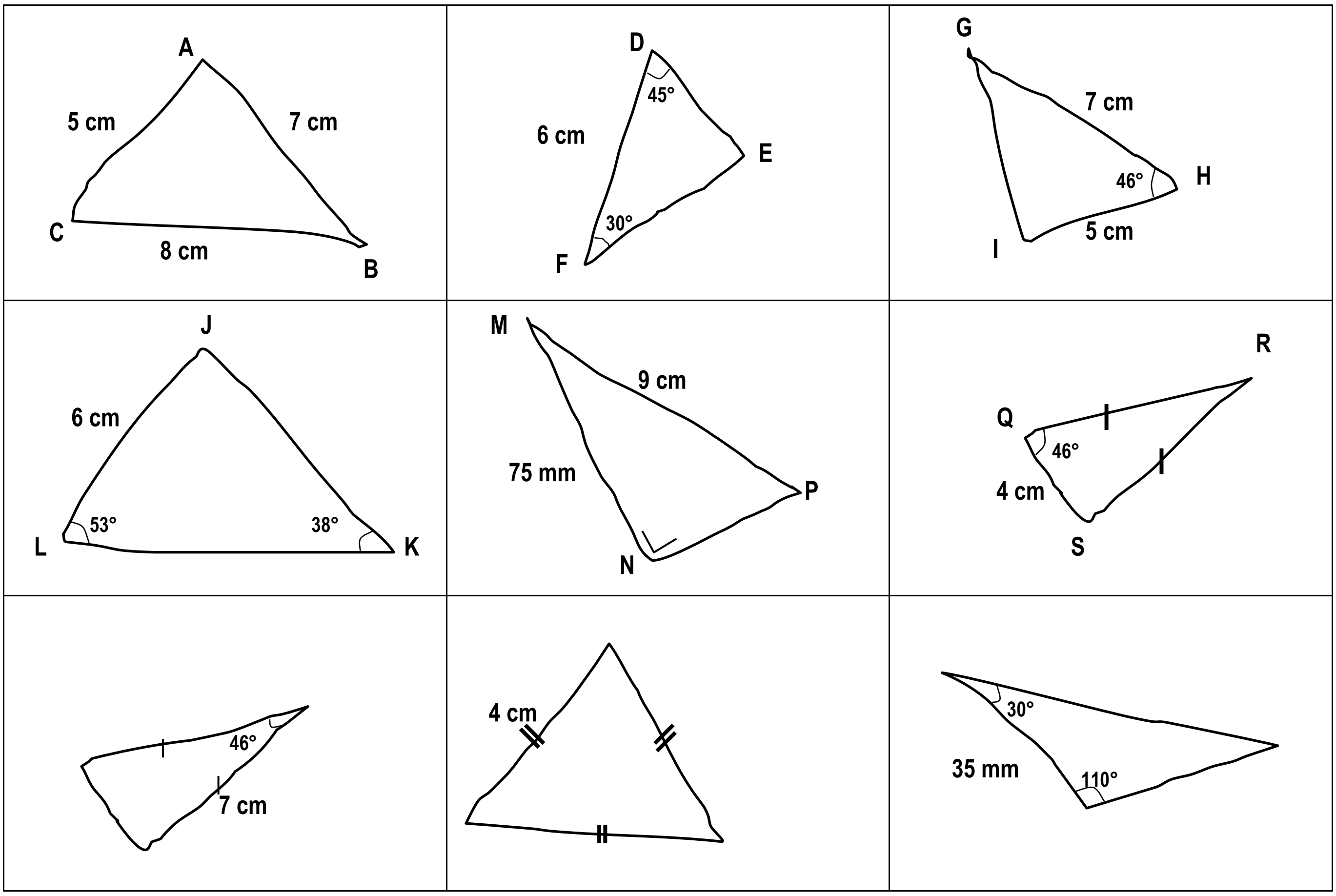
Le compas permet de dessiner des cercles mais aussi de reporter des distances.

Un cercle de centre O et de rayon r ($C_{(O\,;\,r)}$) est l'ensemble des points du plan situés à une distance r du point O.

Le disque de centre O et de rayon r est l'ensemble des points du plan situés à une distance du point O inférieure ou égale à r.

EXPLORATION : CONSTRUCTION DE TRIANGLES

1. Les 9 triangles ci-dessous ont été dessinés à main levée : **VOIR AIDES**

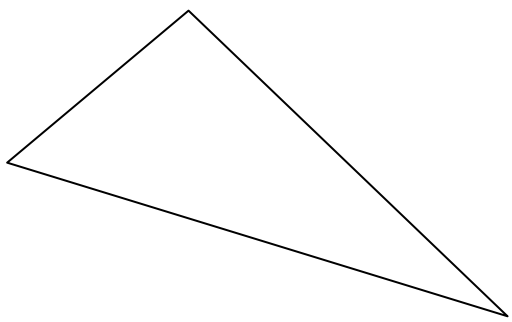


Aide : https://www.geogebra.org/m/gVXW6rSZ

a) Reproduis-les en vraie grandeur.

b) Ecris un message permettant à quelqu'un qui ne voit pas le triangle DEF de le reproduire.

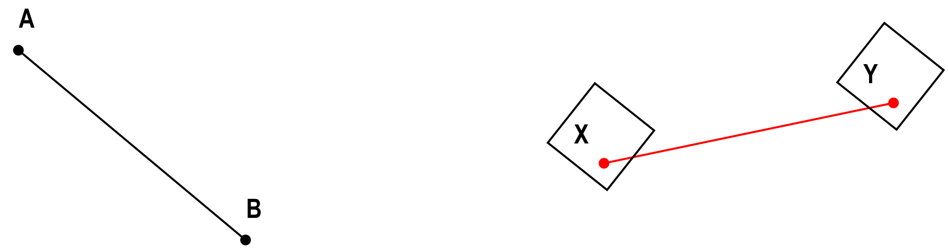
2. Reproduire à la latte ***non graduée*** et au compas le triangle ci-dessous de deux manières différentes.
VOIR AIDES (triangles dont tu connais les 3 côtés)



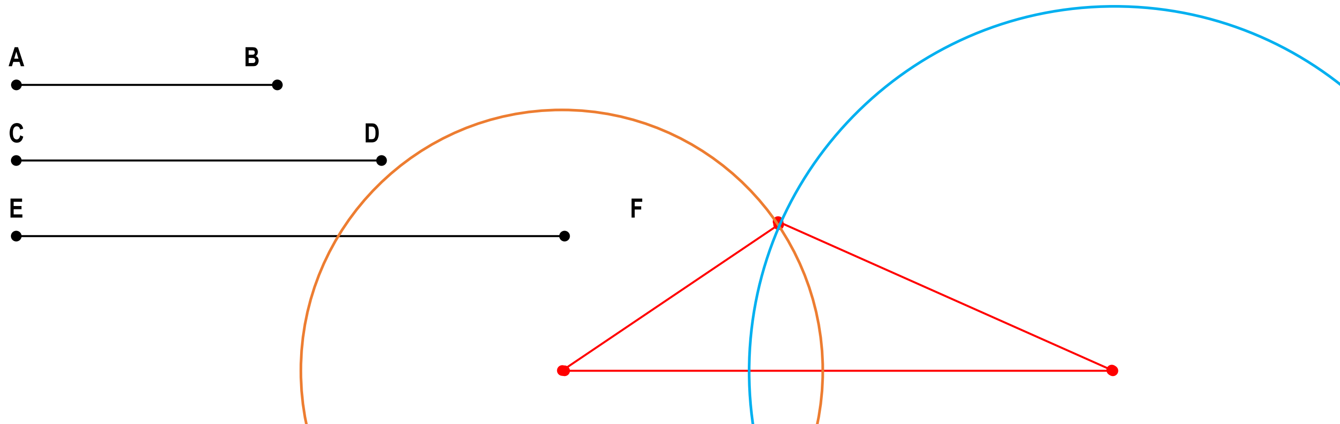
Théorie page 9

2.1. Reporter un segment de droite donné

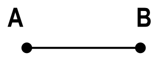
- Construis à la latte ***non graduée*** et au compas un segment [XY] qui à la même longueur que le segment [AB] donné.



- Construis à la latte ***non graduée*** et au compas, un triangle dont les côtés ont respectivement les mêmes longueurs que les trois segments ci-dessous.

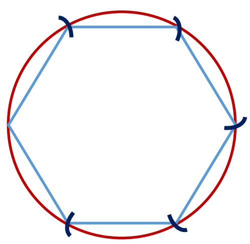


- Construis à la latte ***non graduée*** et au compas un hexagone régulier dont le côté est de la même longueur que le segment [AB] donné.



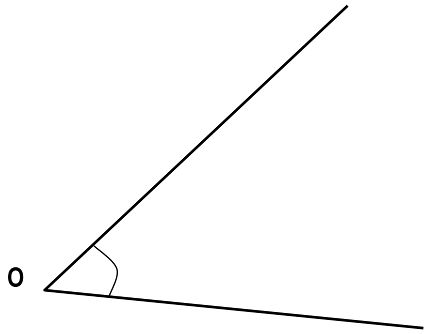
Cercle dont le rayon est égal à la longueur de [AB]

A partir d'un point du cercle, reporter 5x le rayon (longueur de [AB]) sur le cercle. Joindre les points.



2.2. Report d'un angle donné

- Construis à la latte ***non graduée*** et au compas un angle $X\hat{Y}Z$ de même amplitude que l'angle ***Ô*** donné ci-dessous.



Voir aides pour la construction

- Quelles consignes donnerais-tu à ton voisin pour qu'il réalise la construction demandée ?

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

- **Solution retenue par la classe**

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

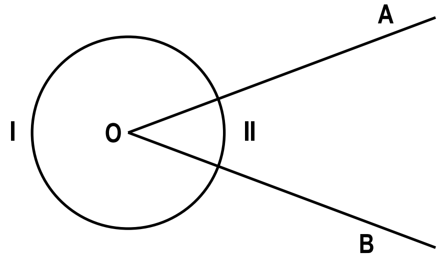
Aide : https://www.geogebra.org/m/gk7efvfg

3. LE RAPPORTEUR

3.1. Les angles

1) Définition de l'angle

Un angle est la figure formée par deux demi-droites de même origine et par une des deux régions du plan délimitée par celles-ci.



2) Remarques et vocabulaire

a) Les demi-droites **[OA** et **[OB** sont les **côtés** de l'angle.

b) L'origine commune à ces demi-droites est le **sommet** de l'angle.

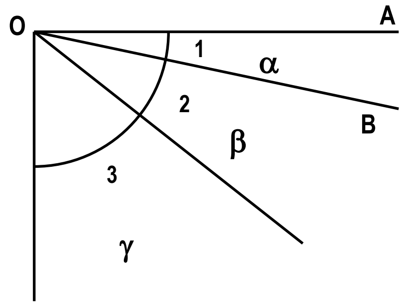
c) La mesure de l'angle ou son ouverture est son **amplitude**. Elle se mesure en degré. Le degré se divise en 60 minutes; la minute se divise en 60 secondes.

d) Les demi-droites délimitent en fait deux angles: I et II. Nous parlerons d'un **angle saillant** lorsqu'il est plus petit qu'un angle plat (II) et **angle rentrant** quand il est plus grand (I). Si rien n'est précisé, nous considérerons toujours l'angle saillant.

3) Notations

a) Un angle se note

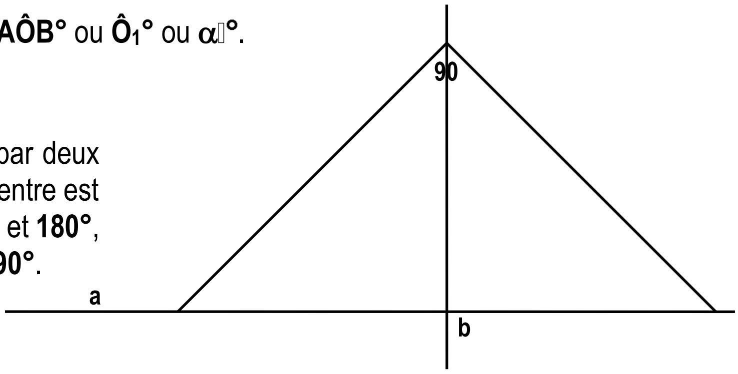
- soit par trois de ses points, le sommet placé au centre de la notation étant surmonté d'un accent circonflexe, les deux autres points étant choisis sur chacun des côtés. Ex: **AÔB**
- soit par le sommet numéroté et surmonté de l'accent circonflexe. Ex: **$\hat{O}_1$**, **$\hat{O}_2$**, **$\hat{O}_3$**
- soit par une lettre grecque Ex: α, β, γ



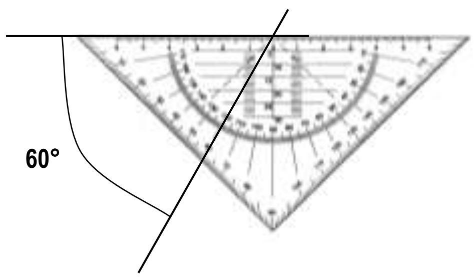
b) La mesure de l'angle **AÔB** se note **AÔB°** ou **$\hat{O}_1$°** ou α°.

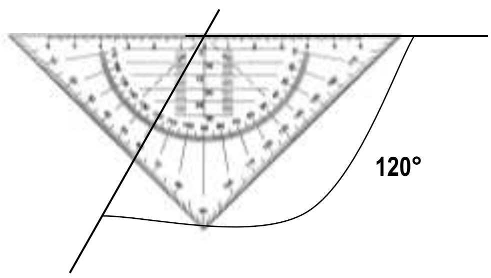
3.2. Mesure d'un angle - le rapporteur

Le rapporteur est gradué de **0°** à **180°** (parfois par deux échelles qui vont dans des sens opposés). Son centre est situé à l'intersection, de la droite **a** passant par **0°** et **180°**, et de la droite **b** perpendiculaire à **a** passant par **90°**.



Voici deux exemples de mesures d'angle :





3.3. Classification d'angles en fonction de leur amplitude

1) L'angle droit

Un angle est droit ssi ses côtés sont perpendiculaires.

Par convention, l'amplitude de l'angle droit est **90°**.

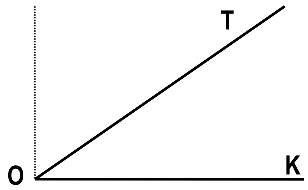
PÔK est un angle droit

[OP ⊥ [OK

PÔK° = 90°

2) L'angle aigu

Un angle est aigu ssi son amplitude est inférieure à 90°.

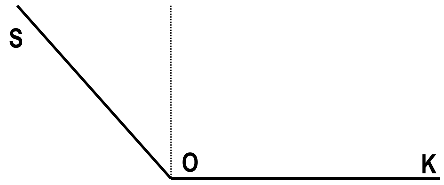


TÔK est un angle aigu

TÔK° < 90°

3) L'angle obtus

Un angle est obtus ssi son amplitude est supérieure à 90°.



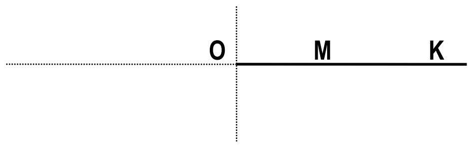
SÔK est un angle obtus

SÔK° > 90°

4) L'angle nul et l'angle plein

L'angle nul et l'angle plein sont des angles dont les côtés sont confondus.

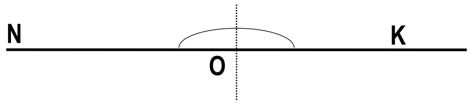
L'amplitude de l'angle nul est **0°**.
L'amplitude de l'angle plein est **360°** (soit quatre fois l'amplitude de l'angle droit).



Suivant l'angle considéré, on a:
MÔK° = 0° (angle nul)
ou
MÔK° = 360° (angle plein)

5) L'angle plat

L'angle plat est un angle dont l'amplitude vaut **180°** (soit 2 fois l'amplitude de l'angle droit).

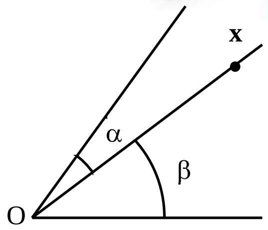


NÔK° = 180°

<u>Remarque</u>: Un angle plat n'est jamais seul, c'est pourquoi il s'agira de préciser quelle est la partie du plan considérée par un arc.

3.4. Vocabulaire à propos de quelques angles particuliers

1] **Angles adjacents**

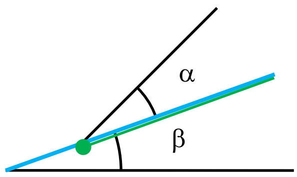


Deux angles sont **adjacents** ssi ils ont un côté commun et sont situés de part et d'autre de ce côté commun.

[OX est commun à **α** et à **β** et
α et **β** sont situés de part et d'autre de **[OX**

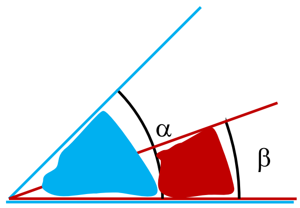
Les deux dessins suivants, représentent-ils des angles adjacents ? → https://www.geogebra.org/m/QCpkSJaX

~~OUI~~ - **NON**



Justifie : **NON, ils n'ont pas de côté commun. Seulement une partie des demi-droites bleue et verte est commune**

~~OUI~~ - **NON**



Justifie : **NON, les angles rouge et bleu ne sont pas situés de part et d'autre du côté commun (celui qui est horizontal)**

2] **Angles complémentaires**

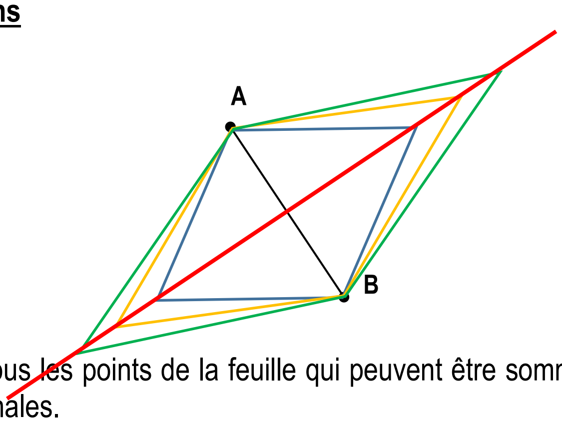
Deux angles sont **complémentaires** ssi la somme de leurs amplitudes est **90°**.

3] **Angles supplémentaires**

Deux angles sont **supplémentaires** ssi la somme de leurs amplitudes est **180°**.

4. MEDIATRICE D'UN SEGMENT

4.1. Définitions



- Dessine tous les points de la feuille qui peuvent être sommet d'un losange qui a **[AB]** pour une de ses diagonales.

Aide : https://www.geogebra.org/m/ZEQANf3D

- Pour construire ces losanges, je dois ....
  ....
  ....
  ....

Constatation:

Tous les points P_1, P_2, P_3, **...** sont **alignés** .

Cette droite, qui est l'ensemble de tous les points équidistants de **A** et de **B,** sera appelée **médiatrice du segment [AB]**. **→ droite tracée en rouge**

Première définition de la *médiatrice d'un segment* → https://www.geogebra.org/m/vkgpc8tm

Dans un plan, la médiatrice d'un segment est l'ensemble de tous les points du plan, équidistants des extrémités du segment.

Remarques

- Dans le chapitre sur les transformations du plan (page 21), tu as dessiné la médiatrice du segment **[AB]**. D'après l'énoncé de cet exercice, tu peux conclure que: dans le plan, la médiatrice d'un segment est aussi

L'axe de symétrie de ce segment

Deuxième définition de la ***médiatrice d'un segment***

La médiatrice d'un segment est son axe de symétrie

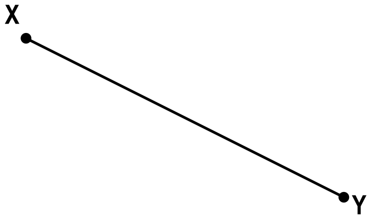
- Cette droite est aussi une des diagonales de chacun des losanges tracés. Tu sais que les diagonales d'un losange sont **perpendiculaires** et se coupent en leur **milieu**.

Troisième définition de la ***médiatrice d'un segment***

La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu

4.2. Construction de la médiatrice d'un segment

Soit le segment **[XY]**. Pour construire la médiatrice de ce segment, il suffit de construire un losange qui admet **[XY]** comme diagonale. **→ Voir aide**

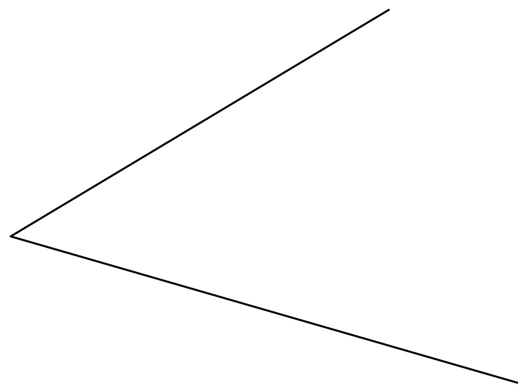


Aide : https://www.geogebra.org/m/dtskmFxv

5. BISSECTRICE D'UN ANGLE

5.1. Définitions

➢ Construis (par pliage ou …) l'axe de symétrie de cet angle :



Cet axe de symétrie coupe l'angle (les angles saillant et rentrant) en deux angles de même amplitude (ils sont superposés).

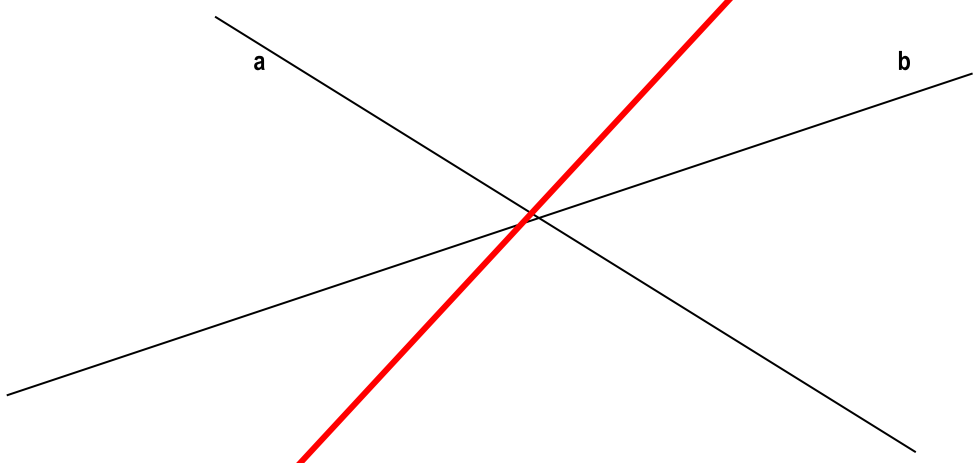
Première définition de la *bissectrice d'un angle*

Dans un plan, la bissectrice d'un angle est l'axe de symétrie de cet angle.

Deuxième définition de la *bissectrice d'un angle*

Dans un plan, la bissectrice d'un angle, est la droite qui divise cet angle en deux angles de même amplitude.

➢ Construis tous les points du plan qui sont à la même distance de la droite **a** que de la droite **b**.



➢ Que constates-tu ?

………

Troisième définition de la *bissectrice d'un angle*

………

………

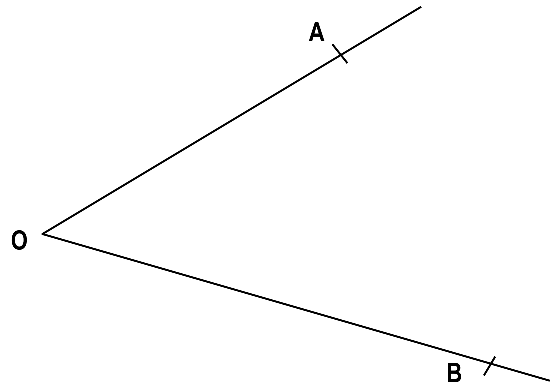
5.2. Construction

Un losange possède deux axes de symétries qui contiennent ses diagonales.

Les diagonales d'un losange sont médiatrices l'une de l'autre et bissectrices des angles qu'elles coupent.

Pour construire la bissectrice de l'angle **AÔB**, il suffit de construire un losange dont un des angles est **AÔB** :

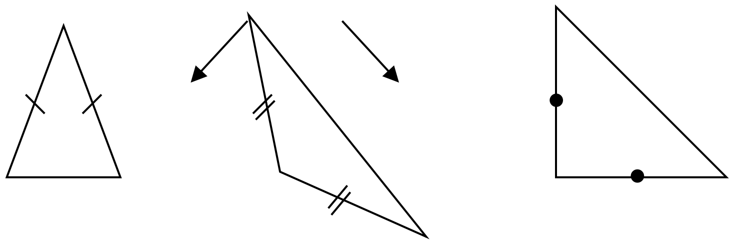
Construire avec → Aide : https://www.geogebra.org/m/wRa7keuG



6. LES TRIANGLES

6.1. Triangle isocèle

Un triangle est *isocèle* ssi il a (au moins) deux côtés de même longueur



Iso / cèle

En grec :

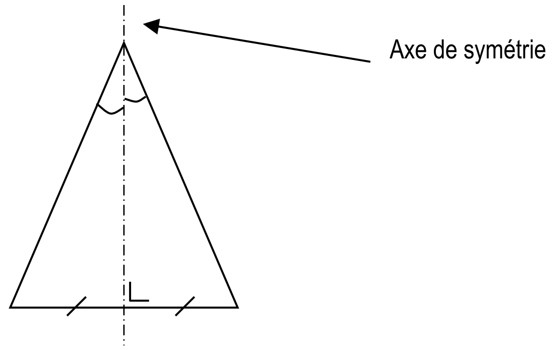
Isos qui signifie « égal » et *Skalos* qui signifie « jambe »

Remarques :

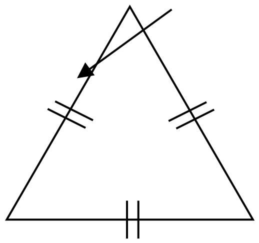
- Le côté inégal est appelé **base** du triangle, et l'angle opposé à cette base **angle au sommet**.
- Deux triangles isocèles « accolés » par leur base forment un losange. Nous avons vu précédemment que dans tout losange, les diagonales sont médiatrices l'une de l'autre et bissectrices des angles qu'elles coupent. Donc :

Propriété des triangles isocèles

Dans un triangle isocèle, la médiatrice de la base est aussi la bissectrice de l'angle au sommet (médiane et hauteur relative à la base).



<u>6.2.</u> <u>Triangle équilatéral</u>



Equi / latéral

<u>En latin</u> :

Aequus qui signifie « égal » et *Latus* qui signifie « côté »

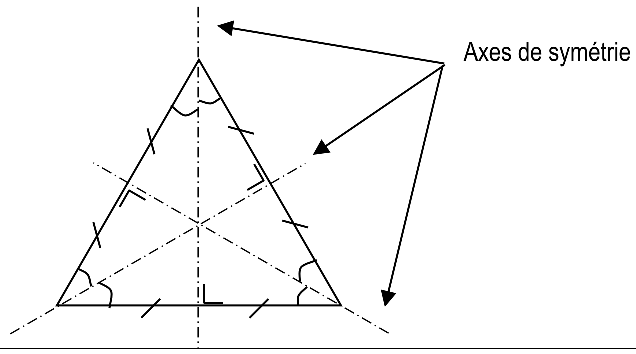
Un triangle est *équilatéral* ssi ses trois côtés sont de même longueur

<u>Remarques</u> :

- Le triangle équilatéral possède toutes les caractéristiques du triangle isocèle ; tout triangle équilatéral est isocèle.
- Tout triangle équilatéral possède trois axes de symétries :

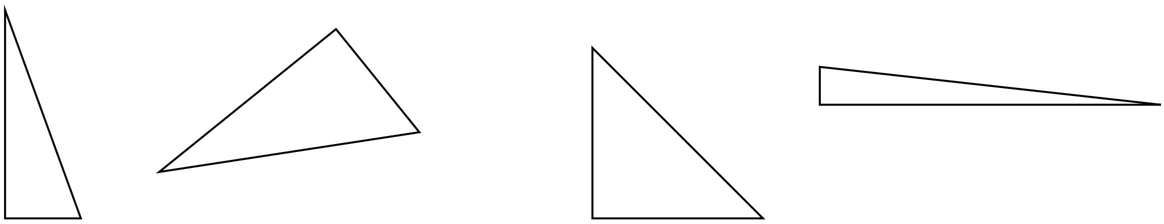
Propriété des triangles équilatéraux

Dans un triangle équilatéral, chaque médiatrice est aussi bissectrice de l'angle qu'elle coupe (médiane et hauteur relative au côté).



6.3. Triangle rectangle

Un triangle est rectangle ssi il possède un angle droit



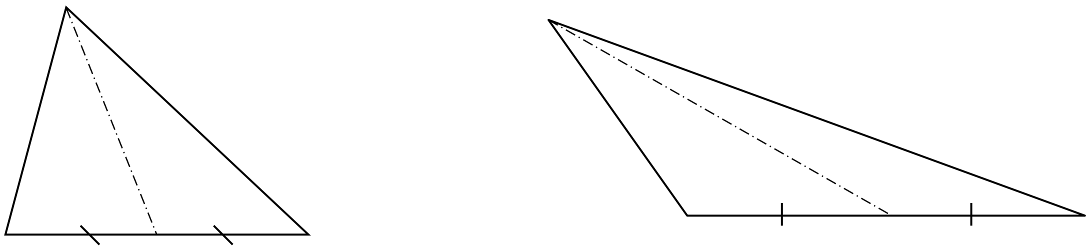
Remarques :

- Le côté opposé à l'angle droit est appelé **l'hypoténuse** du triangle rectangle ; les côtés de l'angle droit sont appelés **cathèdes**.
- Un triangle rectangle peut être isocèle.

6.4. Droites remarquables dans un triangle (hauteur, médiane, médiatrice et bissectrice)

1] Médianes d'un triangle

Une *médiane* d'un triangle est un segment qui relie un sommet au milieu du côté opposé.

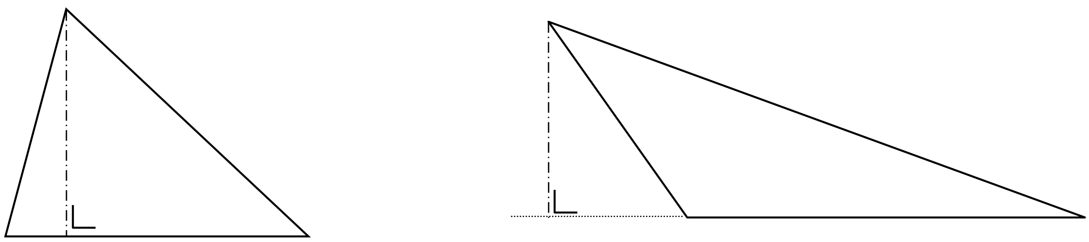


Les trois médianes d'un triangle se coupent en un même point appelé ***centre de gravité*** du triangle.

2] Hauteurs d'un triangle

Une *hauteur* d'un triangle est un segment abaissé d'un sommet perpendiculairement au côté opposé (ou à son prolongement).

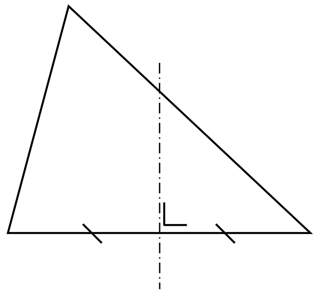
- On parlera parfois de hauteur pour désigner la droite qui contient la hauteur.

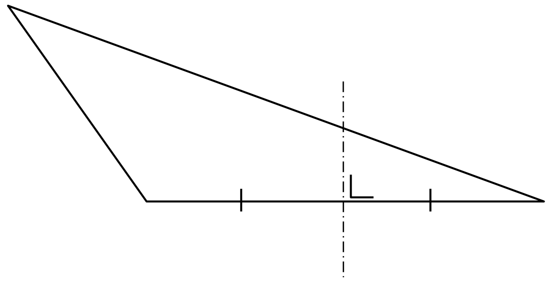


Les trois hauteurs d'un triangle se coupent en un même point appelé ***orthocentre*** du triangle.

3] Médiatrices d’un triangle

Une *médiatrice* d’un triangle est une droite perpendiculaire au milieu du côté opposé.

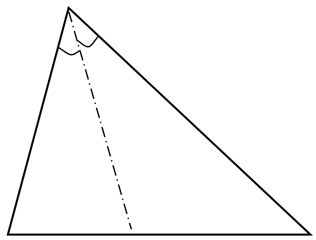


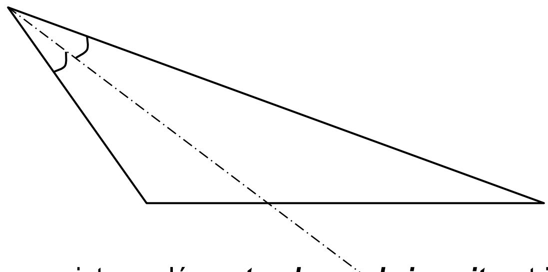


Les trois médiatrices d’un triangle se coupent en un même point appelé ***centre du cercle circonscrit*** au triangle.

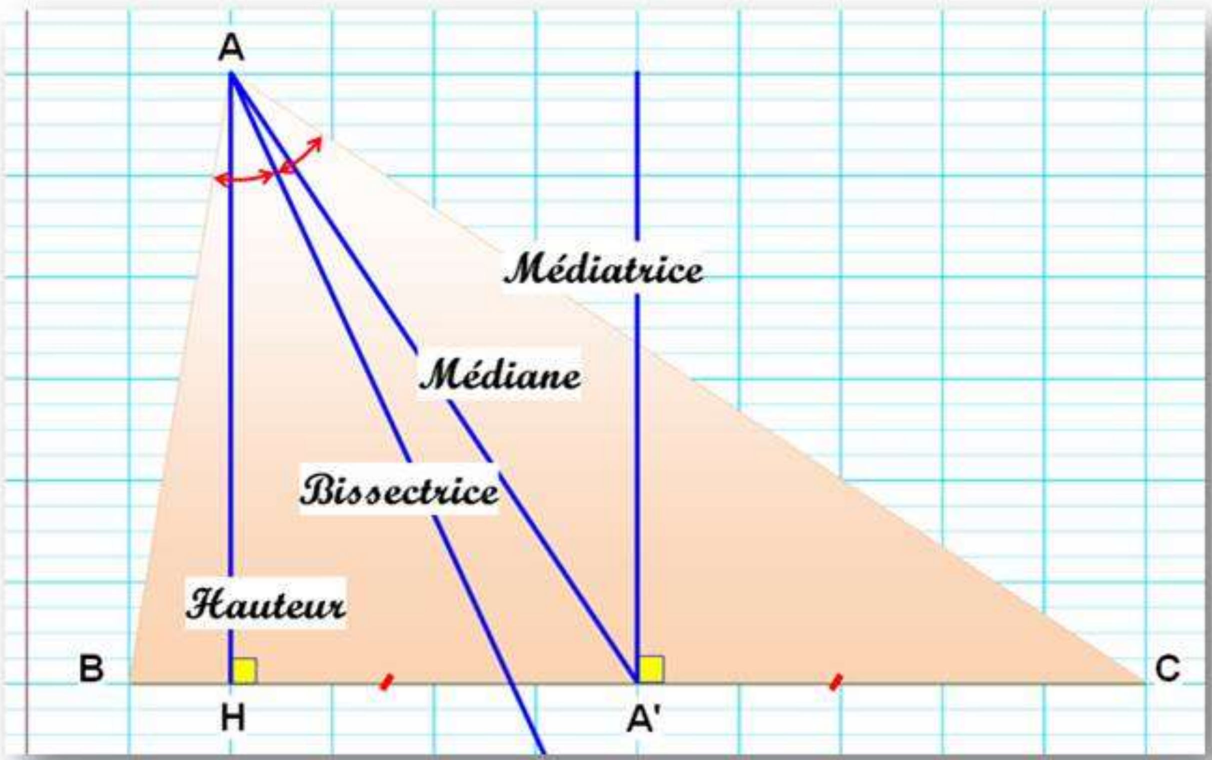
4] Bissectrices d’un triangle

Une *bissectrice* d’un triangle est une droite qui divise un angle intérieur du triangle en deux angles de même amplitude.





Les trois bissectrices d’un triangle se coupent en un même point appelé ***centre du cercle inscrit*** au triangle.



7. LES QUADRILATERES

7.1. Le carré

Un *carré* est un quadrilatère qui a ses quatre côtés de même longueur et ses quatre angles droits.

7.2. Le rectangle

Un *rectangle* est un quadrilatère qui a ses angles droits.

- Tous les carrés sont des rectangles puisqu'ils ont quatre angles droits.

7.3. Le losange

Un *losange* est un quadrilatère qui a ses quatre côtés de même longueur.

- Tous les carrés sont des losanges puisqu'ils ont quatre côtés de même longueur.
- Losange vient du mot gaulois *lausa* qui signifie dalle.

7.4. Le parallélogramme

Un *parallélogramme* est un quadrilatère qui a deux paires de côtés parallèles.

- Tous les carrés, tous les losanges et tous les rectangles sont des parallélogrammes puisqu'ils ont deux paires de côtés parallèles.
- Le mot parallélogramme se divise en deux : « gramme » d'un mot grec qui veut dire « chose écrite », « trait » et parallèle. Un parallélogramme est formé par « des traits parallèles »

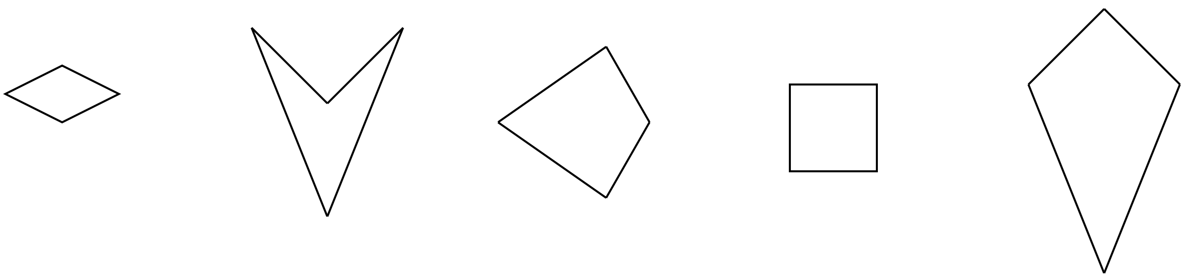
7.5. Le trapèze

Un *trapèze* est un quadrilatère qui a au moins deux côtés parallèles.

- Trapèze vient du grec *trapezion* qui signifie « petite table ».
- Tous les carrés, tous les losanges, tous les rectangles et tous les parallélogrammes sont des trapèzes puisqu'ils ont deux côtés parallèles

7.6. Le cerf-volant

Un *cerf-volant* est un quadrilatère qui possède deux paires de côtés consécutifs de même longueur.



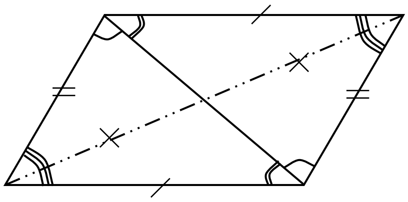
- Tous les carrés et tous les losanges sont des cerfs-volants.

7.7. Propriétés des quadrilatères et symétries

1] Le parallélogramme

Tout parallélogramme peut être construit à partir de deux triangles accolés par un côté. Ces triangles sont symétriques l'un par rapport à l'autre par une symétrie centrale. Par cette symétrie, certains éléments du parallélogramme sont envoyés l'un sur l'autre. En vertu des invariants des symétries centrales, plusieurs propriétés apparaissent :

- ***les côtés opposés ont la même longueur ;***
- ***les angles opposés ont la même amplitude***
- ***les diagonales se coupent en leur milieu.***

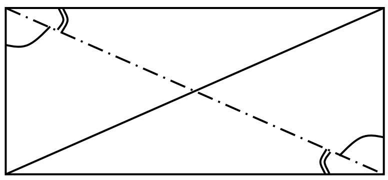


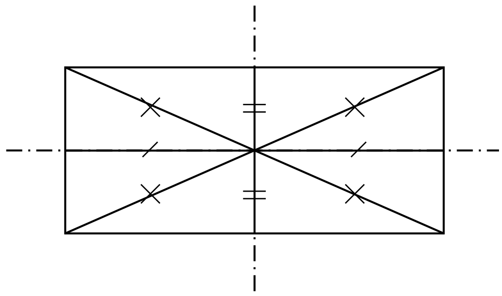
2] Le rectangle

Tout rectangle peut être construit à partir de deux triangles rectangles accolés par l'hypoténuse. Ces triangles sont symétriques l'un par rapport à l'autre par une symétrie centrale dont le centre est le milieu de l'hypoténuse. ***Le rectangle a les mêmes propriétés que le parallélogramme***.

Un rectangle possède aussi deux axes de symétries : ses médianes. En vertu des invariants des symétries axiales, plusieurs propriétés supplémentaires apparaissent :

- ***les diagonales ont même longueur,***
- ***les médianes sont médiatrices l'une de l'autre.***



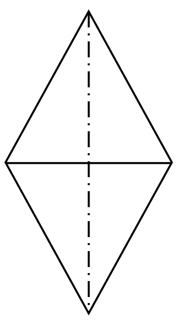


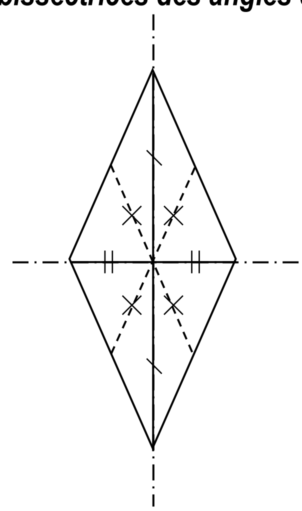
3] Le losange

Tout losange peut être construit à partir de deux triangles isocèles accolés par leur base. Ces triangles sont symétriques l'un par rapport à l'autre par une symétrie centrale dont le centre est le milieu de cette base. ***Le losange a les mêmes propriétés que le parallélogramme***.

Un losange possède aussi deux axes de symétries : ses diagonales. En vertu des invariants des symétries axiales, plusieurs propriétés supplémentaires apparaissent :

- ***ses médianes se coupent en leur milieu et ont même longueur ;***
- ***ses diagonales sont médiatrices l'une de l'autre et bissectrices des angles qu'elles coupent.***



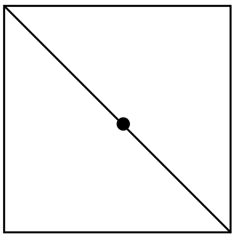


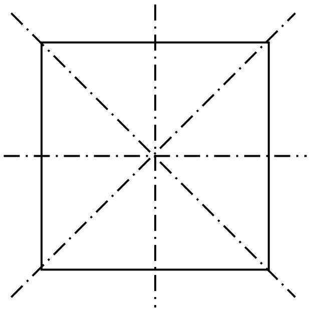
4] **Le carré**

Tout carré peut être construit à partir de deux triangles rectangles isocèles accolés par leur hypoténuse. Ces triangles sont symétriques l'un par rapport à l'autre par une symétrie centrale dont le centre est le milieu de cette hypoténuse. ***Le carré a les mêmes propriétés que le rectangle et le losange***.

Un carré possède quatre axes de symétries : ses diagonales et ses médianes. En vertu des invariants des symétries axiales, plusieurs propriétés supplémentaires apparaissent :

- ***ses médianes ont même longueur et sont médiatrices l'une de l'autre***
- ***ses diagonales sont médiatrices l'une de l'autre et bissectrices des angles qu'elles coupent.***



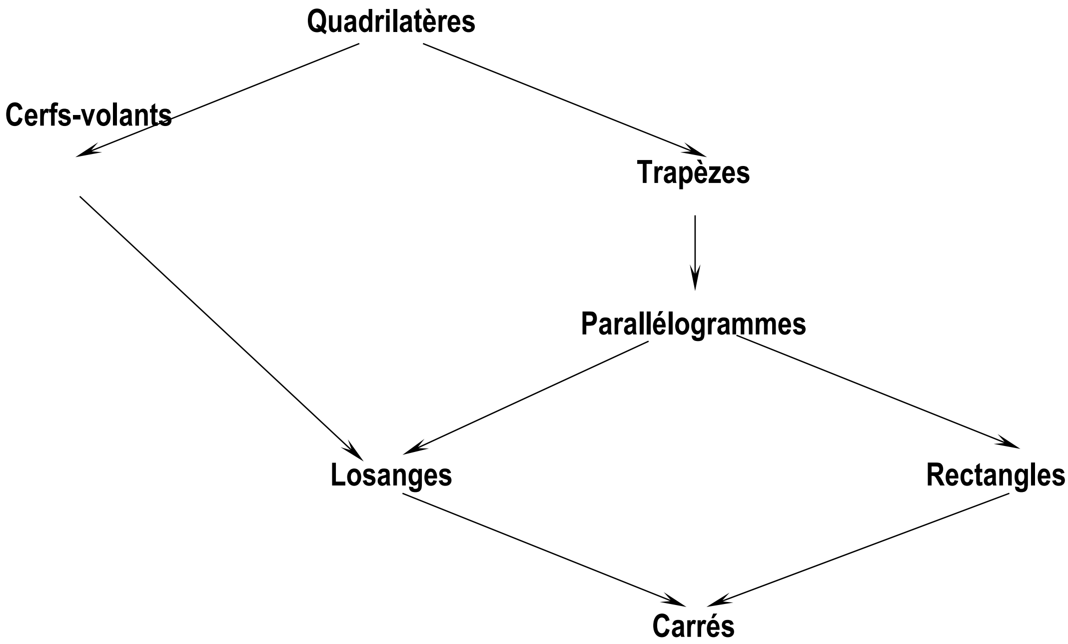


7.8. Définitions en chaîne

En résumé :

- Le losange, le rectangle et le carré sont des parallélogrammes.
- Le carré est un rectangle.
- Le carré est un losange.

Ce qui donne la chaîne suivante :



Nous pouvons aussi enchaîner leurs définitions :

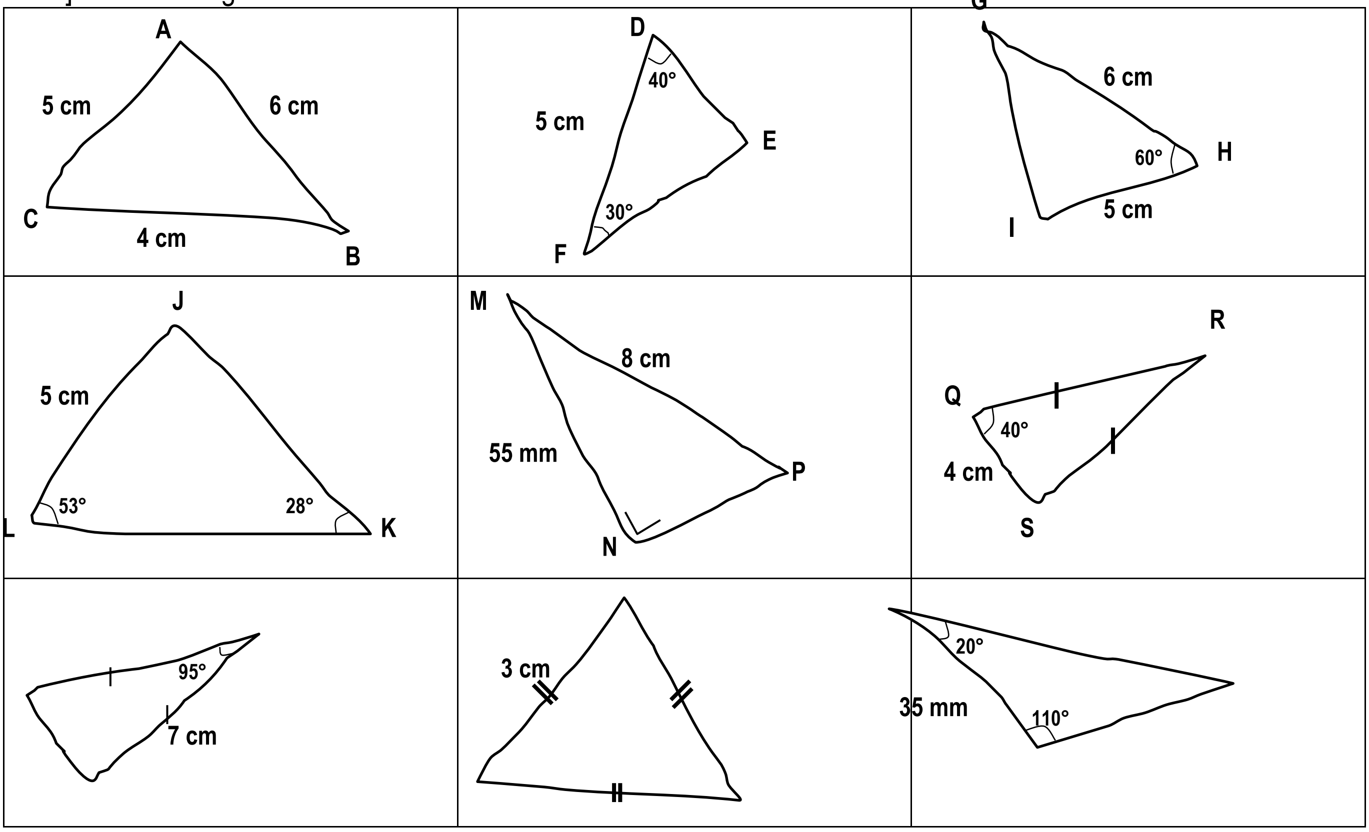
- Le **trapèze** est un **quadrilatère** qui a une paire de côtés parallèles.
- Le **parallélogramme** est un **trapèze** qui a deux paires de côtés parallèles.
- Le **losange** est un **parallélogramme** qui a quatre côtés de même longueur.
- Le **rectangle** est un **parallélogramme** qui a quatre angles droits.
- Un **carré** est un **losange** qui a quatre angles droits ou un **carré** est un **rectangle** qui a quatre côtés de même longueur.

De plus :

- Le **cerf-volant** est un **quadrilatère** qui a deux paires de côtés consécutifs de même longueur.
- Le **losange** est un **cerf-volant** dont les côtés opposés ont même longueur.

7.9. Exercices supplémentaires

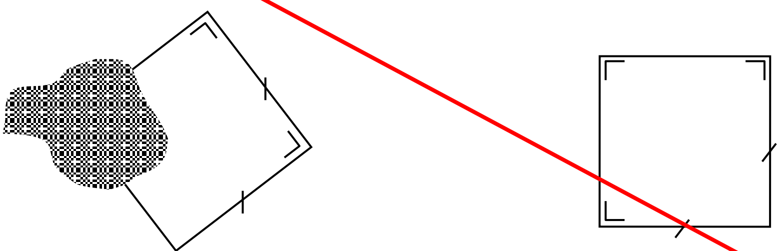
1] Les 9 triangles ci-dessous ont été dessinés à main levée :



c) Reproduis-les en vrai grandeur.

d) Ecris un message permettant à quelqu'un qui ne voit pas le triangle DEF de le reproduire.

2] Dans chacun des cas suivants, peux-tu être sûr que le quadrilatère **ABCD** est un carré ? Justifie. (Tu ne tiens compte que des informations codées sur le dessin).



3] Construis un parallélogramme dont une diagonale mesure 7 cm et dont les côtés mesurent 6 et 4 cm.

4] Construire les quadrilatères suivants (**quand cela est possible**).

a) Un quadrilatère qui a une paire de côtés parallèles et qui n'est pas un parallélogramme. → **trapèze**

b) Un quadrilatère qui a 3 angles droits mais qui n'est pas un rectangle. → **impossible car le 4ème angle est droit aussi**

c) Un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu. → **losange**

d) Un quadrilatère dont les diagonales ont même longueur. → **bcp de possibilités**

e) Un losange qui a un angle droit et qui n'est pas un rectangle. → **impossible**

f) Un rectangle dont les diagonales sont perpendiculaires. → **carré**

g) Un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires. → **losange**

h) Un trapèze dont les diagonales ont même longueur. → **trapèze isocèle**

5] Soit un segment [AC] de 5 cm qui est la diagonale d'un parallélogramme. Si la mesure de l'autre diagonale est de 7 cm, où peuvent se trouver les sommets B et D de ce parallélogramme ?

6] Soit un segment [AC] de 5 cm qui est la diagonale d'un losange. Si la mesure de l'autre diagonale est de 7 cm, où peuvent se trouver les sommets B et D de ce losange ?

7] Reproduire aux instruments, à plus grande échelle, les figures suivantes :